

特殊相対論 No.1 Galilean transformation

1. 静止系 K からの観測

(a) 静止系 K から見て、速さ V で動く座標系 K' の原点 X および速さ v で動く物体の位置 x を求め、以下の表を完成させなさい。

t [s]	X [m]	V [m/s]	x [m]	v [m/s]
0	0	+0.5	0	+1
1	0.5		1	
2	1		2	
3	1.5		3	
4	2		4	
5	2.5		5	
6	3		6	
7	3.5		7	
8	4		8	
9	4.5		9	
10	5		10	

(b) 縦軸に K 系の時刻 t 、横軸に K 系からみた位置 x 、 X をとって、上の表をグラフに描きなさい。これを**時空図** (space-time diagram) といい、軌跡を**世界線** (world line) という。 t 軸からの傾きは速さを表すので、以下では $\tan \theta = V$ 、 $\tan \varphi = v$ としよう。

2. 速さ V で動く K' 系からの観測

(a) 速さ V で動いている K' 系から見て、 K 系の原点 x'_K と物体の位置 x' 、およびそれぞれの速さ v'_K 、 v' を求め、以下の表を完成させなさい。

t' [s]	x'_K [m]	v'_K [m/s]	x' [m]	v' [m/s]
0	0	-0.5	0	+0.5
1	-0.5		0.5	
2	-1		1	
3	-1.5		1.5	
4	-2		2	
5	-2.5		2.5	
6	-3		3	
7	-3.5		3.5	
8	-4		4	
9	-4.5		4.5	
10	-5		5	

(b) 2. の表の値を、1. で描いたグラフの中から読み込むために K' 系の世界線上に時刻 t' の目盛をとりなさい。時空図上で x' 座標は、 t' 軸に平行な線を x 軸に下せば読むことができる。

(c) 世界線の傾きが速さを表している。 K' 系から見た速さ (2. の表の値) をグラフから読み取りなさい。

3. 2つの座標系から見た物体の位置 x 、 x' の関係式を求めなさい。

$$x' = x - Vt$$

$$t' = t$$

4. Galilei 変換の式は行列を使って

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -V & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} \quad (1)$$

と書くことができる.

(a) この行列式が 1 であることを確かめなさい.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -V & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1$$

(b) 上の式 (1) を t, x について解き, Galilei 変換の逆変換を求めなさい. 逆行列を求めてもよい.

$$\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ V & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix}$$

5. 時空面積保存則 (特殊相対論 No.6 5. 参照)

(a) $\tan \theta = V$ としたとき, $\cos \theta, \sin \theta$ を V で表しなさい.

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \quad \text{より}$$

$$1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

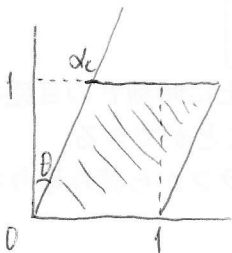
(t が x),

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{1}{1 + \tan^2 \theta}} = \frac{1}{\sqrt{1 + V^2}}$$

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \frac{1}{1 + V^2} = \frac{V^2}{1 + V^2}$$

$$\therefore \sin \theta = \frac{V}{\sqrt{1 + V^2}}$$

(b) 長さが 1 と $\alpha_c = \sqrt{1 + V^2}$ の 2 辺が角 $(\frac{\pi}{2} - \theta)$ で交わっている平行四辺形を描いて, その面積が 1 となることを示しなさい.



$$S = 1 \times \alpha_c \times \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

$$= \sqrt{1 + V^2} \times \left(\sin \frac{\pi}{2} \cos \theta - \cos \frac{\pi}{2} \sin \theta\right)$$

$$= \sqrt{1 + V^2} \cos \theta = \sqrt{1 + V^2} \times \frac{1}{\sqrt{1 + V^2}} = 1$$

6. 今日の講義でわかったこと・わからなかったこと・感想などを書きなさい. (自由記載)

