

特殊相対論 No.6 斜交座標

1. 前回の Lorentz 変換を, $w = ct$, $\beta = \frac{V}{c}$, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ として書きなおすと,

$$\begin{pmatrix} w' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ x \end{pmatrix} \tag{1}$$

となる. グラフ上に $w - x$ 軸を直交座標にとり, $V = \frac{c}{2}$ のとき w' 軸, x' 軸を書き入れよう. Lorentz 変換の式 (1) において

(a) $w' = 0$ において x' 軸の方程式を求め, x' 軸を書き込みなさい.

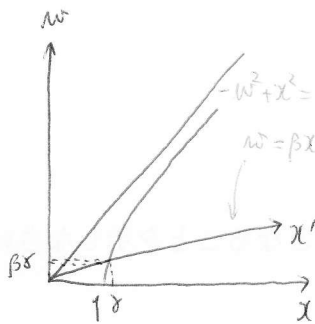
$$w' = 0 = \gamma w - \beta\gamma x \quad \text{より} \quad w = \beta x = \frac{x}{2}$$

(b) $x' = 0$ において w' 軸の方程式を求め, w' 軸を書き込みなさい.

$$x' = 0 = -\beta\gamma w + \gamma x \quad \text{より} \quad w = \frac{1}{\beta} x = 2x$$

2. 斜交軸の目盛り

(a) 斜交軸 x' と双曲線 $-w^2 + x^2 = +1$ の交点の座標と, 原点から交点までの長さ α_r を β で書き表しなさい. これが斜交軸 x' の 1 である.



$$-\beta^2 x^2 + x^2 = 1$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma$$

$$w^2 = x^2 - 1 = \frac{1}{1-\beta^2} - 1 = \frac{\beta^2}{1-\beta^2}$$

$$\therefore w = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \beta\gamma$$

したがって 原点から交点までの距離は

$$\alpha_r = \sqrt{\gamma^2 + \beta^2 \gamma^2} = \sqrt{\gamma^2(1+\beta^2)}$$

$$= \sqrt{\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}}$$

(b) 斜交軸 w' と双曲線 $-w^2 + x^2 = -1$ の交点の座標と, 原点から交点までの長さ α_r を β で書き表しなさい. これが斜交軸 w' の 1 である.

同上

3. $V = \frac{c}{2}$ のとき $\beta = 0.5$ である.

(a) γ の値を求めなさい.

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-0.5^2}} = \frac{1}{\sqrt{0.75}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \doteq 1.15$$

(b) $\alpha_r = \sqrt{\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}}$ の値を求めなさい.

$$\alpha_r = \sqrt{\frac{1+0.25}{1-0.25}} = \sqrt{\frac{1.25}{0.75}} = \sqrt{\frac{5}{3}} = \frac{\sqrt{15}}{3} \doteq 1.29$$

4. 斜交座標の目盛を書きこみなさい. ただし, 各目盛は, $\alpha_r = \sqrt{\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}}$ 倍になっている.

5. 時空面積保存則(特殊相対論 No.1 5. 参照)

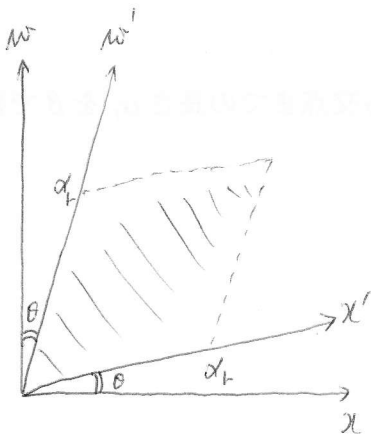
(a) 直交座標と斜交座標との交わる角度を θ とすると, $\tan \theta = \beta$ となる. $\cos \theta$, $\sin \theta$ を β を用いて表しなさい.

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \quad \text{or} \quad 1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{1}{1+\tan^2 \theta}} = \frac{1}{\sqrt{1+\beta^2}}$$

$$\sin \theta = \sqrt{1-\cos^2 \theta} = \sqrt{1-\frac{1}{1+\beta^2}} = \sqrt{\frac{\beta^2}{1+\beta^2}} = \frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}$$

(b) 長さが $\alpha_r = \sqrt{\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}}$ で, 角 $\chi = \frac{\pi}{2} - 2\theta$ で交わる平行四辺形の面積が 1 となることを示しなさい.



$$\begin{aligned} S &= \alpha_r^2 \sin \chi = \frac{1+\beta^2}{1-\beta^2} \sin \left(\frac{\pi}{2} - 2\theta \right) \\ &= \frac{1+\beta^2}{1-\beta^2} \left(\sin \frac{\pi}{2} \cos 2\theta - \cos \frac{\pi}{2} \sin 2\theta \right) \\ &= \frac{1+\beta^2}{1-\beta^2} \cos 2\theta \\ &= \frac{1+\beta^2}{1-\beta^2} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = \frac{1+\beta^2}{1-\beta^2} \left(\frac{1}{1+\beta^2} - \frac{\beta^2}{1+\beta^2} \right) = 1 \end{aligned}$$

6. 今日の講義でわかったこと・わからなかったこと・感想などを書きなさい. (自由記載)

