番号　　　　　　氏名

特殊相対論 No.14

運動方程式を解く (2) 鉛直投げ上げ

$$\begin{cases} x(t+\epsilon) = & x(t) + \epsilon v(t) \\ v(t+\epsilon) = & v(t) - \epsilon g \left\{ 1 - \left(\frac{v(t)}{c} \right)^2 \right\}^{3/2} \end{cases} \tag{1}$$

ここで，$\epsilon = 0.80$ s，$g = 0.25$ m/s^2，$c = 1.0$ m/s とし，小数第 4 位を四捨五入しなさい．

時刻 t 〔s〕	位置 $x(t)$ 〔m〕	速さ $v(t)$ 〔m/s〕
0	$x(0) = 0.0$	$v(0) = 0.50$
		$v(\frac{\epsilon}{2}) = v(0) - \frac{\epsilon}{2} g \left\{ 1 - \left(\frac{v(0)}{c} \right)^2 \right\}^{3/2}$ $= 0.435$
ϵ	0.348	0.289
2ϵ	0.579	0.114
3ϵ	0.670	−0.083
4ϵ	0.604	−0.281
5ϵ	0.379	−0.457
6ϵ	0.013	−0.598
7ϵ	−0.465	−0.701
8ϵ	−1.026	−0.774
9ϵ	−1.645	−0.824
10ϵ	−2.304	−0.861
11ϵ	−2.993	−0.887
12ϵ	−3.703	−0.907
13ϵ	−4.429	−0.922
14ϵ	−5.167	−0.933
15ϵ	$= -5.913$	*****

1. $v - t$ グラフ，$w(= ct) - x$ グラフをグラフ用紙に描きなさい．

2. 質量 m の物体に一定の力 $F=-mg$ が働くときの運動方程式

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\right)=F=-mg \tag{2}$$

を初期条件 ($t=0$ のとき $v=v_0=+0.5c,\ x=0$) のもとに解きなさい.

$$\frac{mv}{\sqrt{1-(v/c)^2}}=-mgt+A(\text{積分定数})$$

初期条件より $A=\dfrac{mv_0}{\sqrt{1-(v_0/c)^2}}$

$$\frac{m^2v^2}{1-(v/c)^2}=(A-mgt)^2$$

$$m^2v^2=(A-mgt)^2\left\{1-(v/c)^2\right\}$$

$$\left\{m^2+\left(\frac{A-mgt}{c}\right)^2\right\}v^2=(A-mgt)^2$$

$$\therefore v=\frac{A-mgt}{\sqrt{m^2+\left(\frac{A-mgt}{c}\right)^2}}=\frac{\frac{mv_0}{\sqrt{1-(v_0/c)^2}}-mgt}{\sqrt{m^2+\left(\frac{mv_0/c}{\sqrt{1-(v_0/c)^2}}-\frac{mgt}{c}\right)^2}}=\frac{c\left(\frac{v_0/c}{\sqrt{1-(v_0/c)^2}}-\frac{gt}{c}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{v_0/c}{\sqrt{1-(v_0/c)^2}}-\frac{gt}{c}\right)^2}}$$

$$x=\int dt\,\frac{c\left(\frac{v_0/c}{\sqrt{1-(v_0/c)^2}}-\frac{gt}{c}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{v_0/c}{\sqrt{1-(v_0/c)^2}}-\frac{gt}{c}\right)^2}}=-\frac{c^2}{g}\sqrt{1+\left(\frac{v_0/c}{\sqrt{1-(v_0/c)^2}}-\frac{gt}{c}\right)^2}+B(\text{積分定数})$$

初期条件から

$$B=\frac{c^2}{g}\sqrt{1+\frac{(v_0/c)^2}{1-(v_0/c)^2}}=\frac{c^2}{g}\frac{1}{\sqrt{1-(v_0/c)^2}}$$

したがって,

$$x=\frac{c^2}{g}\frac{1}{\sqrt{1-(v_0/c)^2}}-\frac{c^2}{g}\sqrt{1+\left(\frac{v_0/c}{\sqrt{1-(v_0/c)^2}}-\frac{g}{c}t\right)^2}$$

3. 縦軸に $w=ct$, 横軸に x をとった $w-x$ グラフを描きなさい.

3. 上に描いたグラフより次の座標を求めなさい.

(a) w 軸との交点 A の座標 w_A を求めなさい.

$x=0$ より

$$\frac{1}{1-(v_0/c)^2} = 1+\left(\frac{v_0/c}{\sqrt{1-(v_0/c)^2}}-\frac{g}{c}t\right)^2$$

$$\left(\frac{v_0/c}{\sqrt{1-(v_0/c)^2}}-\frac{g}{c^2}w_A\right)^2 = \frac{1}{1-(v_0/c)^2}-1 = \frac{(v_0/c)^2}{1-(v_0/c)^2}$$

$$\frac{v_0/c}{\sqrt{1-(v_0/c)^2}}-\frac{g}{c^2}w_A = \pm\frac{v_0/c}{\sqrt{1-(v_0/c)^2}} \quad \therefore w_A = 0,\ \frac{c^2}{g}\frac{2v_0/c}{\sqrt{1-(v_0/c)^2}} = \frac{2v_0c}{g\sqrt{1-(v_0/c)^2}}$$

(b) 地球から最も遠ざかった点 B の時間座標は $2w_B = w_A$ であることから, x_B を求めなさい.

$$x_B = \frac{c^2}{g}\frac{1}{\sqrt{1-(v_0/c)^2}} - \frac{c^2}{g}\sqrt{1+\Bigg(\underbrace{\frac{v_0/c}{\sqrt{1-(v_0/c)^2}}-\frac{g}{c^2}\frac{v_0c}{g\sqrt{1-(v_0/c)^2}}}_{=0}\Bigg)^2} = \frac{c^2}{g}\frac{1}{\sqrt{1-(v_0/c)^2}}-\frac{c^2}{g}$$

4. 問 **1.** の解から物体の固有時 τ

$$\tau = \int_0^t dt'\sqrt{1-(v/c)^2} \tag{3}$$

を計算し, $w=ct$ と x を τ で表しなさい. (Hint : $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \sinh^{-1}x$)

$$1-\frac{v^2}{c^2} = 1-\frac{\left(\frac{v_0/c}{\sqrt{1-(v_0/c)^2}}-\frac{g}{c}t\right)^2}{1+\left(\frac{v_0/c}{\sqrt{1-(v_0/c)^2}}-\frac{g}{c}t\right)^2} = \frac{1}{1+\left(\frac{v_0/c}{\sqrt{1-(v_0/c)^2}}-\frac{g}{c}t\right)^2}$$

したがって,

$$\tau = \int_0^t dt'\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{v_0/c}{\sqrt{1-(v_0/c)^2}}-\frac{g}{c}t'\right)^2}} = \int_a^b\left(-\frac{c}{g}\right)dy\frac{1}{\sqrt{1+y^2}} = -\frac{c}{g}\operatorname{arcsinh}\left(\frac{v_0/c}{\sqrt{1-(v_0/c)^2}}-\frac{gt}{c}\right)+\frac{c}{g}\operatorname{arcsinh}\frac{v_0/c}{\sqrt{1-(v_0/c)^2}}$$

$$\frac{c}{g}\operatorname{arcsinh}\left(\frac{v_0/c}{\sqrt{1-(v_0/c)^2}}-\frac{gt}{c}\right) = -\tau+\frac{c}{g}\operatorname{arcsinh}\frac{v_0/c}{\sqrt{1-(v_0/c)^2}}$$

$$\frac{v_0/c}{\sqrt{1-(v_0/c)^2}}-\frac{gt}{c} = \sinh\left(-\frac{g\tau}{c}+\operatorname{arcsinh}\frac{v_0/c}{\sqrt{1-(v_0/c)^2}}\right)$$

$$t = \frac{c}{g}\frac{v_0/c}{\sqrt{1-(v_0/c)^2}}-\frac{c}{g}\sinh\left(-\frac{g}{c}\tau+\operatorname{arcsinh}\frac{v_0/c}{\sqrt{1-(v_0/c)^2}}\right)$$

$$\boxed{w = \frac{c^2}{g}\frac{v_0/c}{\sqrt{1-(v_0/c)^2}}-\frac{c^2}{g}\sinh\left(-\frac{g}{c}\tau+\operatorname{arcsinh}\frac{v_0/c}{\sqrt{1-(v_0/c)^2}}\right)}\ //$$

$$x = \frac{c^2}{g}\frac{1}{\sqrt{1-(v_0/c)^2}}-\frac{c^2}{g}\sqrt{1+\sinh^2\left(-\frac{g\tau}{c}+\operatorname{arcsinh}\frac{v_0/c}{\sqrt{1-(v_0/c)^2}}\right)}$$

$$\boxed{x = \frac{c^2}{g}\frac{1}{\sqrt{1-(v_0/c)^2}}-\frac{c^2}{g}\cosh\left(-\frac{g\tau}{c}+\operatorname{arcsinh}\frac{v_0/c}{\sqrt{1-(v_0/c)^2}}\right)}\ //$$

5. x_B のときの物体の固有時を τ_B とする．物体の座標 (w, x) を τ_B を使ってあらわすと

$$w = \frac{c^2}{g}\left[\sinh\left\{\frac{g}{c}(\tau - \tau_B)\right\} + \sinh\left(\frac{g}{c}\tau_B\right)\right] \tag{4}$$

$$x = \frac{c^2}{g}\left[\cosh\left(\frac{g}{c}\tau_B\right) - \cosh\left\{\frac{g}{c}(\tau - \tau_B)\right\}\right] \tag{5}$$

となることを示しなさい．

$$x_B = \frac{c^2}{g}\cancel{\frac{1}{\sqrt{1-(v_0/c)^2}}} - \frac{c^2}{g} = \frac{c^2}{g}\cancel{\frac{1}{\sqrt{1-(v_0/c)^2}}} - \frac{c^2}{g}\cosh\left(-\frac{g\tau_B}{c} + \operatorname{arcsinh}\frac{v_0/c}{\sqrt{1-(v_0/c)^2}}\right)$$

$$\underbrace{\cosh\left(-\frac{g\tau_B}{c} + \operatorname{arcsinh}\frac{v_0/c}{\sqrt{1-(v_0/c)^2}}\right) = 1}_{\text{"} \atop 0}$$

より $\operatorname{arcsinh}\dfrac{v_0/c}{\sqrt{1-(v_0/c)^2}} = \dfrac{g\tau_B}{c}$ 　$\therefore \dfrac{v_0/c}{\sqrt{1-(v_0/c)^2}} = \sinh\left(\dfrac{g\tau_B}{c}\right)$

また

$$\cosh\left(\frac{g\tau_B}{c}\right) = \sqrt{1+\sinh^2\left(\frac{g\tau_B}{c}\right)} = \sqrt{1+\frac{(v_0/c)^2}{1-(v_0/c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(v_0/c)^2}}$$

以上から

$$w = \frac{c^2}{g}\sinh\left(\frac{g\tau_B}{c}\right) - \frac{c^2}{g}\sinh\left(-\frac{g}{c}\tau + \frac{g}{c}\tau_B\right) = \frac{c^2}{g}\sinh\left(\frac{g\tau_B}{c}\right) + \frac{c^2}{g}\sinh\left(\frac{g\tau}{c} - \frac{g}{c}\tau_B\right)$$

$$x = \frac{c^2}{g}\cosh\left(\frac{g\tau_B}{c}\right) - \frac{c^2}{g}\cosh\left(-\frac{g}{c}\tau + \frac{g}{c}\tau_B\right) = \frac{c^2}{g}\cosh\left(\frac{g\tau_B}{c}\right) - \frac{c^2}{g}\cosh\left(\frac{g}{c}\tau - \frac{g}{c}\tau_B\right)$$

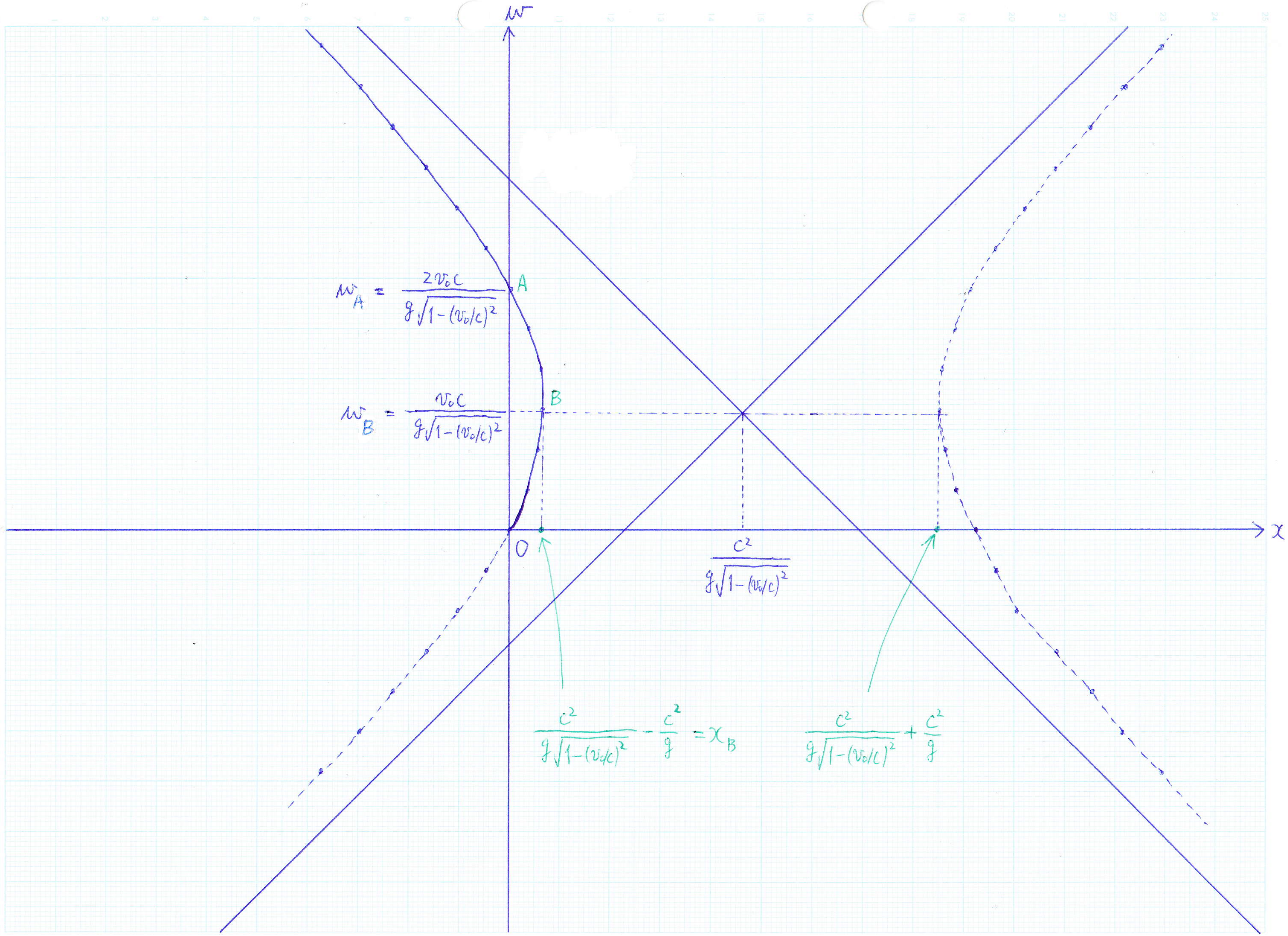
6. 物体が地球に戻る時刻は，物体の固有時で $\tau_A = 2\tau_B$ である．w_A と $c\tau_A$ の大小関係を決定しなさい．

(4)式に $\tau = \tau_A = 2\tau_B$ を代入すると，

$$w_A = \frac{2c^2}{g}\sinh\left(\frac{g}{c}\tau_B\right)$$

したがって，

$$\frac{w_A}{c\tau_A} = \frac{\frac{c^2}{g}\sinh\left(\frac{g}{c}\tau_B\right)}{2c\tau_B} = \frac{c}{g}\,\frac{\sinh\left(\frac{g}{c}\tau_B\right)}{\tau_B} > 1 \quad \text{より}\quad w_A > c\tau_A$$



$$w = x - \frac{c^2}{g}\frac{1-v_0/c}{\sqrt{1-(v_0/c)^2}}$$

$$w = -x + \frac{c^2}{g}\frac{1+v_0/c}{\sqrt{1-(v_0/c)^2}}$$

番号　　　　　　　　　　氏名

特殊相対論 No.14-2　ふたごのパラドックス

1. ロケット君は時刻 $t=0$ に速さ $+0.5c$ で地球を出発し，$x=2.5$ m の点 B で向きを逆にし，速さ $-0.5c$ で地球に戻ってくる．地球に戻ったときを A 点とする．

(a) この時空図を描きなさい．

(b) ロケット君が地球に戻ってきたとき，地上君の時刻 w_A は何光秒か．

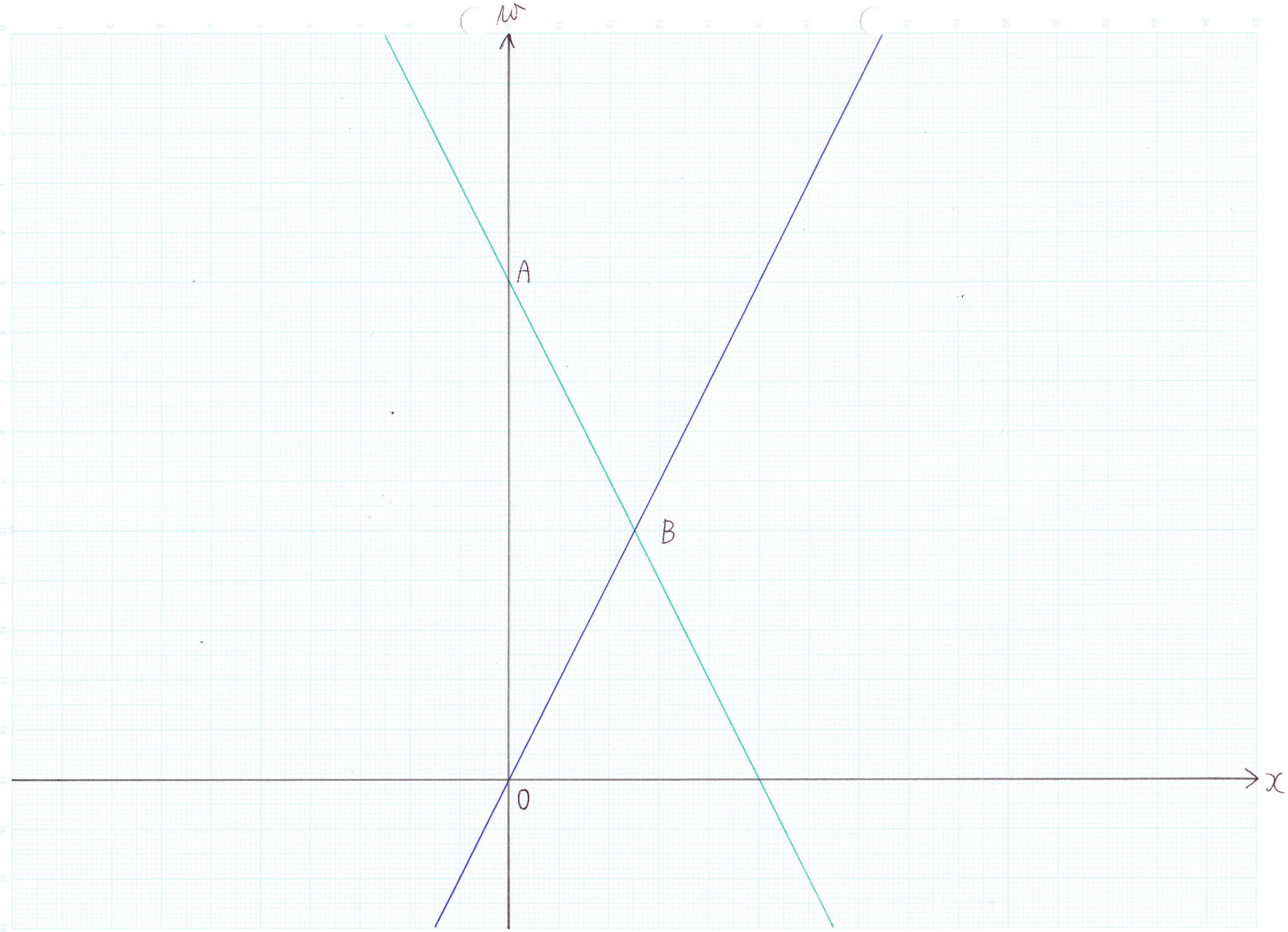
$w_A = 10$ 光秒

(c) ロケット君の世界線の長さ（ロケット君の固有時）$c\tau_A$ は何光秒か．

$$c\tau_A = 2 \times \frac{5.60\,\mathrm{cm}}{\alpha_r} = 2 \times \frac{5.60}{1.29} = 8.68\text{光秒}$$

2. ふたごのパラドックスは，パラドックスか？

3. 今日の講義でわかったこと・わからなかったこと・感想などを書きなさい．(自由記載)



w
A
B
x
O