番号　　　　　　　　　氏名

量子力学 No.4-1 Uncertainty relation

1. Schwarz inequality

いま

$$|\gamma\rangle = |\alpha\rangle + \lambda|\beta\rangle \tag{1}$$

を考えよう．ここで，λ は複素数である．まず，どんな状態でも $\langle\gamma|\gamma\rangle \geq 0$ は満たされる．

$$\langle\gamma|\gamma\rangle = (\langle\alpha + \lambda^*\langle\beta|)(|\alpha\rangle + \lambda|\beta\rangle) \tag{2}$$

$$= \langle\alpha|\alpha\rangle + \lambda\langle\alpha|\beta\rangle + \lambda^*\langle\beta|\alpha\rangle + |\lambda|^2\langle\beta|\beta\rangle \geq 0 \tag{3}$$

ここで

$$\lambda \equiv -\frac{\langle\beta|\alpha\rangle}{\langle\beta|\beta\rangle} \tag{4}$$

とおくと

$$\langle\alpha|\alpha\rangle\langle\beta|\beta\rangle - \langle\beta|\alpha\rangle\langle\alpha|\beta\rangle \geq 0 \tag{5}$$

よって

$$\langle\alpha|\alpha\rangle\langle\beta|\beta\rangle \geq |\langle\beta|\alpha\rangle|^2 \tag{6}$$

が得られる．これを**シュバルツの不等式**という．

2. エルミート演算子 $\left(C^\dagger = C\right)$ の期待値は実数

$$\langle\alpha|C|\alpha\rangle^* = \langle\alpha|C^\dagger|\alpha\rangle = \langle\alpha|C|\alpha\rangle \tag{7}$$

3. 反エルミート演算子 $\left(C^\dagger = -C\right)$ の期待値は純虚数

$$\langle\alpha|C|\alpha\rangle^* = \langle\alpha|C^\dagger|\alpha\rangle = -\langle\alpha|C|\alpha\rangle \tag{8}$$

4. Uncertainty relation

次に任意の状態ベクトル $|\mathrm{any}\rangle$ を考えて，

$$|\alpha\rangle = \delta A|\mathrm{any}\rangle, \qquad |\beta\rangle = \delta B|\mathrm{any}\rangle \tag{9}$$

とおくと Schwarz の不等式 (6) を使って

$$\langle\mathrm{any}|(\delta A)^2|\mathrm{any}\rangle\langle\mathrm{any}|(\delta B)^2|\mathrm{any}\rangle \geq |\langle\mathrm{any}|\delta A\cdot\delta B|\mathrm{any}\rangle|^2 \tag{10}$$

ここで，次のように左辺を二つの項にわける．

$$\delta A\cdot\delta B = \frac{1}{2}[\delta A, \delta B] + \frac{1}{2}\{\delta A, \delta B\} = \frac{1}{2}[A, B] + \frac{1}{2}\{\delta A, \delta B\} \tag{11}$$

となる．これより両辺 $|\mathrm{any}\rangle$ で期待値をとると式 (10) 右辺の絶対値の中身は

$$\langle\delta A\cdot\delta B\rangle = \frac{1}{2}\langle[A, B]\rangle + \frac{1}{2}\langle\{\delta A, \delta B\}\rangle \tag{12}$$

となる．右辺第一項は $[A, B]^\dagger = -[A, B]$ と式 (8) より純虚数であることがわかる．第二項は $\{\delta A, \delta B\}^\dagger = \{A, B\}$ と式 (7) より実数であることがわかる．そこでこの絶対値の二乗は，それぞれの二乗となる．したがって，式 (10) は

$$\left\langle(\delta A)^2\right\rangle\left\langle(\delta B)^2\right\rangle \geq \frac{1}{4}|\langle[A, B]\rangle|^2 + \frac{1}{4}|\langle\{\delta A, \delta B\}\rangle|^2 \geq \frac{1}{4}|\langle[A, B]\rangle|^2 \tag{13}$$

よって

$$\sqrt{\langle(\delta A)^2\rangle}\sqrt{\langle(\delta B)^2\rangle} = \Delta A\cdot\Delta B \geq \frac{1}{2}|\langle[A, B]\rangle| \tag{14}$$

これを**不確定性関係**という．

5. 相関

式 (12) の左辺と同じ関係を考えるが，少し違うように変形しよう．

$$\langle \delta A \cdot \delta B \rangle = \langle (A - \langle A \rangle) \cdot (B - \langle B \rangle) \rangle = \langle AB \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle \tag{15}$$

この量を**相関**とよぼう．相関は

$$\begin{cases} 0 & \text{相関がない} \\ \pm 1 & \text{最大の相関がある} \end{cases} \tag{16}$$

となる．

番号　　　　　　　　　氏名

量子力学 No.4-2 Measurements and the uncertainty relations

1. S_z の固有状態 $|\uparrow\rangle$ での期待値（平均値）を計算し，その物理的意味を述べなさい．

(a) $\langle \sigma_x \rangle = \langle \uparrow | \sigma_x | \uparrow \rangle =$

(b) $\langle \sigma_y \rangle = \langle \uparrow | \sigma_y | \uparrow \rangle =$

(c) $\langle \sigma_z \rangle = \langle \uparrow | \sigma_z | \uparrow \rangle =$

(d) $\langle \sigma_x \rangle^2 + \langle \sigma_y \rangle^2 + \langle \sigma_z \rangle^2 =$

2. S_z の固有状態 $|\uparrow\rangle$ で次の期待値を計算しなさい．ゆらぎ（標準偏差）を計算し，その物理的意味を述べなさい．

(a) $\langle \sigma_x^2 \rangle = \langle \uparrow | \sigma_x^2 | \uparrow \rangle =$

(b) $\langle \sigma_y^2 \rangle = \langle \uparrow | \sigma_y^2 | \uparrow \rangle =$

(c) $\langle \sigma_z^2 \rangle = \langle \uparrow | \sigma_z^2 | \uparrow \rangle =$

(d) $\varDelta \sigma_x =$

(e) $\varDelta \sigma_y =$

(f) $\varDelta \sigma_z =$

3. S_z の固有状態 $|\uparrow\rangle$ において，不確定性関係が成り立っているか確かめなさい．

(a) $[\sigma_x, \sigma_y] = 2i\sigma_z$ から確かめる．

- $\Delta\sigma_x \cdot \Delta\sigma_y =$
- $\frac{1}{2}|\langle[\sigma_x, \sigma_y]\rangle| =$

(b) $[\sigma_y, \sigma_z] = 2i\sigma_x$ から確かめる．

- $\Delta\sigma_y \cdot \Delta\sigma_z =$
- $\frac{1}{2}|\langle[\sigma_y, \sigma_z]\rangle|$

(c) $[\sigma_z, \sigma_x] = 2i\sigma_y$ から確かめる．

- $\Delta\sigma_z \cdot \Delta\sigma_x$
- $\frac{1}{2}|\langle[\sigma_z, \sigma_x]\rangle|$

4. 今日の講義でわかったこと・わからなかったこと・感想などを書きなさい．(自由記載)

番号　　　　　　　　氏名

量子力学 No.4-3 Measurements and the uncertainty relations

1. No.2-4 と No.3-2 を利用して，次の期待値の表の空欄をうめなさい．

σ_x		始状態					
		$\lvert x\uparrow\rangle$	$\lvert x\downarrow\rangle$	$\lvert y\uparrow\rangle$	$\lvert y\downarrow\rangle$	$\lvert\uparrow\rangle$	$\lvert\downarrow\rangle$
終状態	$\langle x\uparrow\rvert$						
	$\langle x\downarrow\rvert$						
	$\langle y\uparrow\rvert$						
	$\langle y\downarrow\rvert$						
	$\langle\uparrow\rvert$						
	$\langle\downarrow\rvert$						

σ_y		始状態					
		$\lvert x\uparrow\rangle$	$\lvert x\downarrow\rangle$	$\lvert y\uparrow\rangle$	$\lvert y\downarrow\rangle$	$\lvert\uparrow\rangle$	$\lvert\downarrow\rangle$
終状態	$\langle x\uparrow\rvert$						
	$\langle x\downarrow\rvert$						
	$\langle y\uparrow\rvert$						
	$\langle y\downarrow\rvert$						
	$\langle\uparrow\rvert$						
	$\langle\downarrow\rvert$						

σ_z		始状態					
		$\vert x \uparrow\rangle$	$\vert x \downarrow\rangle$	$\vert y \uparrow\rangle$	$\vert y \downarrow\rangle$	$\vert \uparrow\rangle$	$\vert \downarrow\rangle$
終状態	$\langle x \uparrow \vert$						
	$\langle x \downarrow \vert$						
	$\langle y \uparrow \vert$						
	$\langle y \downarrow \vert$						
	$\langle \uparrow \vert$						
	$\langle \downarrow \vert$						