

動力学 No.12 運動方程式を解く (7) 減衰振動

$$\begin{cases} x(t+\epsilon) &= x(t) + \epsilon v\left(t + \frac{\epsilon}{2}\right) \\ v\left(t + \frac{\epsilon}{2}\right) &= v\left(t - \frac{\epsilon}{2}\right) + \epsilon a(t) \end{cases}$$

ここで、 $a(t) = -\omega_0^2 x(t) - \frac{2\mu}{m} v\left(t - \frac{\epsilon}{2}\right)$ である。また、 $\epsilon = 0.50$ s, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 1.0$ rad/s, $\frac{2\mu}{m} = 0.20$ s⁻¹ とし、小数第4位を四捨五入しなさい。

| 時刻 t [s] | 位置 $x(t)$ [m] | 速さ $v(t)$ [m/s] | 加速度 $a(t)$ [m/s ²] |
|--------------|---------------|---------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------|
| 0 | $x(0) = 1.0$ | $v(0) = 0.0$ | $a(0) = -1.0$ |
| | | $v\left(\frac{\epsilon}{2}\right) = v(0) + \frac{\epsilon}{2}a(0)$ $= -0.25$ | |
| ϵ | | -0.663 | -0.825 |
| 2ϵ | | -0.868 | -0.411 |
| 3ϵ | | -0.836 | 0.064 |
| 4ϵ | | -0.598 | 0.476 |
| 5ϵ | | -0.235 | 0.727 |
| 6ϵ | | 0.151 | 0.772 |
| 7ϵ | $= -0.650$ | 0.461 | 0.619 |
| 8ϵ | | 0.624 | 0.327 |
| 9ϵ | | 0.615 | -0.018 |
| 10ϵ | | 0.453 | -0.324 |
| 11ϵ | | 0.194 | -0.518 |
| 12ϵ | | -0.087 | -0.563 |
| 13ϵ | | -0.319 | -0.463 |
| 14ϵ | | -0.448 | -0.257 |
| 15ϵ | $= 0.098$ | | -0.008 |
| | | ***** | |

- $x-t$ グラフを描きなさい。
- 同じ座標系に、振動運動 (動力学 No.11), 臨界運動 (動力学 No.12-2), 過減衰 (動力学 No.12-3) の $x-t$ グラフも書き込みなさい。

3. Newton の運動方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 0.2\frac{dx}{dt} + x = 0 \quad (1)$$

を解くことを考えよう.

(a) 解の形を $x(t) = e^{\lambda t}$ と仮定しよう. これを微分方程式に代入して, λ に対する二次方程式をもとめよう.

(b) 上の二次方程式を解いて, λ_1 と λ_2 を求めなさい.

(c) 解は A, B を定数として,

$$x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} \quad (2)$$

と書くことができる. オイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ を使って $x(t)$ を書き直しなさい.

(d) 上で求めた $x(t)$ を t で微分して速さ $v(t)$ を求めなさい.

(e) 初期条件 $x(0) = 1, v(0) = 0$ から定数を求め, $x(t)$ を決定しなさい.

4. 日常生活の中で, 減衰振動の例をあげ説明しなさい.

5. 今日の講義でわかったこと・わからなかったこと・感想などを書きなさい. (自由記載)

| | |
|--------------------|-------------------|
| 動力学 No.12-2 | 運動方程式を解く (8) 臨界振動 |
|--------------------|-------------------|

$$\begin{cases} x(t+\epsilon) &= x(t) + \epsilon v\left(t + \frac{\epsilon}{2}\right) \\ v\left(t + \frac{\epsilon}{2}\right) &= v\left(t - \frac{\epsilon}{2}\right) + \epsilon a(t) \end{cases}$$

ここで、 $a(t) = -\omega_0^2 x(t) - \frac{2\mu}{m} v\left(t - \frac{\epsilon}{2}\right)$ である。また、 $\epsilon = 0.50 \text{ s}$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 1.0 \text{ rad/s}$, $\frac{2\mu}{m} = 2.0 \text{ s}^{-1}$ とし、小数第4位を四捨五入しなさい。

| 時刻 t [s] | 位置 $x(t)$ [m] | 速さ $v(t)$ [m/s] | 加速度 $a(t)$ [m/s ²] |
|--------------|---------------|---------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------|
| 0 | $x(0) = 1.0$ | $v(0) = 0.0$ | $a(0) = -1.0$ |
| | | $v\left(\frac{\epsilon}{2}\right) = v(0) + \frac{\epsilon}{2}a(0)$ $= -0.25$ | |
| ϵ | 0.875 | -0.438 | -0.375 |
| 2ϵ | 0.656 | -0.328 | 0.219 |
| 3ϵ | 0.492 | -0.246 | 0.164 |
| 4ϵ | 0.369 | -0.185 | 0.123 |
| 5ϵ | 0.277 | -0.138 | 0.092 |
| 6ϵ | 0.208 | -0.104 | 0.069 |
| 7ϵ | 0.156 | -0.078 | 0.052 |
| 8ϵ | 0.117 | -0.058 | 0.039 |
| 9ϵ | 0.088 | -0.044 | 0.029 |
| 10ϵ | 0.066 | -0.033 | 0.022 |
| 11ϵ | 0.050 | -0.025 | 0.016 |
| 12ϵ | 0.038 | -0.018 | 0.012 |
| 13ϵ | 0.029 | -0.014 | 0.009 |
| 14ϵ | 0.022 | -0.010 | 0.007 |
| 15ϵ | 0.014 | ***** | 0.005 |

- $x-t$ グラフを描きなさい。

2. Newton の運動方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + x = 0 \quad (3)$$

を解くことを考えよう.

(a) 解の形を $x(t) = e^{\lambda t}$ と仮定しよう. これを微分方程式に代入して, λ に対する二次方程式をもとめよう.

(b) 上の二次方程式を解きなさい. この場合は重解となっている.

(c) 解 λ は一つしかないので, 定数変化法によって解を求める. 解の形は A, B を定数として

$$x(t) = (At + B)e^{\lambda t} \quad (4)$$

と書くことができる. この解を t で微分して, 速さ $v(t)$ を求めなさい.

(d) 初期条件 $x(0) = 1, v(0) = 0$ から定数 A, B を求め, 解の形 $x(t)$ を決定しなさい.

3. 日常生活の中で, 減衰振動の例をあげ説明しなさい.

4. 今日の講義でわかったこと・わからなかったこと・感想などを書きなさい. (自由記載)

動力学 No.12-3 運動方程式を解く (9) 過減衰

$$\begin{cases} x(t+\epsilon) &= x(t) + \epsilon v\left(t + \frac{\epsilon}{2}\right) \\ v\left(t + \frac{\epsilon}{2}\right) &= v\left(t - \frac{\epsilon}{2}\right) + \epsilon a(t) \end{cases}$$

ここで、 $a(t) = -\omega_0^2 x(t) - \frac{2\mu}{m} v\left(t - \frac{\epsilon}{2}\right)$ である。また、 $\epsilon = 0.50$ s, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 1.0$ rad/s, $\frac{2\mu}{m} = 3.0$ s⁻¹ とし、小数第4位を四捨五入しなさい。

| 時刻 t [s] | 位置 $x(t)$ [m] | 速さ $v(t)$ [m/s] | 加速度 $a(t)$ [m/s ²] |
|--------------|---------------|---------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------|
| 0 | $x(0) = 1.0$ | $v(0) = 0.0$ | $a(0) = -1.0$ |
| | | $v\left(\frac{\epsilon}{2}\right) = v(0) + \frac{\epsilon}{2}a(0)$ $= -0.25$ | |
| ϵ | 0.875 | -0.313 | -0.125 |
| 2ϵ | 0.719 | -0.203 | 0.219 |
| 3ϵ | 0.618 | -0.207 | -0.008 |
| 4ϵ | 0.515 | -0.153 | 0.107 |
| 5ϵ | 0.439 | -0.142 | 0.023 |
| 6ϵ | 0.368 | -0.112 | 0.059 |
| 7ϵ | 0.312 | -0.099 | 0.026 |
| 8ϵ | 0.263 | -0.081 | 0.036 |
| 9ϵ | 0.223 | -0.070 | 0.022 |
| 10ϵ | 0.188 | -0.058 | 0.024 |
| 11ϵ | 0.159 | -0.049 | 0.017 |
| 12ϵ | 0.135 | -0.041 | 0.016 |
| 13ϵ | 0.115 | -0.035 | 0.013 |
| 14ϵ | 0.098 | -0.029 | 0.011 |
| 15ϵ | 0.084 | ***** | 0.009 |

- $x-t$ グラフを描きなさい。

2. Newton の運動方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + x = 0 \quad (5)$$

を解くことを考えよう.

(a) 解の形を $x(t) = e^{\lambda t}$ と仮定しよう. これを微分方程式に代入して, λ に対する二次方程式をもとめよう.

(b) 上の二次方程式を解いて, λ_1 と λ_2 を求めなさい.

(c) 解は A, B を定数として, $x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$ と書くことができる. $x(t)$ を書き下しなさい.

(d) 上で求めた $x(t)$ を t で微分して速さ $v(t)$ を求めなさい.

(e) 初期条件 $x(0) = 1, v(0) = 0$ から定数を求め, $x(t)$ を決定しなさい.

3. 日常生活の中で, 過減衰の例をあげ説明しなさい.

4. 今日の講義でわかったこと・わからなかったこと・感想などを書きなさい. (自由記載)