

**動力学 No.15** 力学的エネルギー保存則 (2)

1. バネによる力  $F = -kx$  が働くときの運動について考える。運動方程式は

$$m \frac{dv}{dt} = -kx$$

と書かれている。ここで、 $\frac{k}{m} = 1.0 \text{ s}^{-2}$  とする。

- (a) 両辺に速度  $v = \frac{dx}{dt}$  をかけて、エネルギー積分を実行しなさい。積分定数を  $E$  として、エネルギー保存則を導きなさい。

- (b) もう一度  $t$  で積分して、位置  $x(t)$  を求めなさい。積分定数を  $\varphi$  とする。

(c) 三角関数の加法定理  $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$  を使い, 上で求めた  $x(t)$  が

$$x(t) = A \cos t + B \sin t$$

となることを示しなさい.

(d) 初期条件  $x(0) = 1$ ,  $v(0) = 0$  より位置  $x(t)$  を求めなさい. (動力学 No.11 問 **3**. 参照)

**動力学 No.15-2** 力学的エネルギー保存則 (2)

単振動の運動方程式

$$m \frac{dv}{dt} = -kx \quad (1)$$

を初期条件 ( $t = 0$  のとき  $x_0 = 1$ ,  $v_0 = 0$ ) のもとで積分すると (動力学 No.11 参照)

$$x = \cos t, \quad v = -\sin t \quad (2)$$

が得られた。ここで,  $m = k = 1$  とした。一方, 式 (1) をエネルギー積分して

$$\frac{m}{2}v^2 + \frac{k}{2}x^2 = E \text{ (定数)} \quad (3)$$

が得られた。  $\epsilon = 0.50$  s として, 小数第 4 位を四捨五入して数値を求めた (裏面)。1. 一枚のミリ方眼紙に,  $x-t$ ,  $v-t$ ,  $K-t$ ,  $U-t$  のグラフを描きなさい。

2. 次の問いに答えなさい。

(a) 運動エネルギー  $K = \frac{m}{2}v^2$  を時刻  $t$  の関数として表しなさい。(b) 位置エネルギー  $U = \frac{k}{2}x^2$  を時刻  $t$  の関数として表しなさい。(c) 力学的エネルギー  $E = K + U$  を求めなさい。時刻  $t$  を含まない定数となるか?3. 位置エネルギー  $U = \frac{k}{2}x^2$  がエネルギーの単位 J であることを確かめなさい。

時刻 $t$ [s]	速さ $v$ [m/s]	$\frac{m}{2}v^2$ [J]	位置 $x$ [m]	$\frac{k}{2}x^2$ [J]	$\frac{m}{2}v^2 + \frac{k}{2}x^2$ [J]
0	0		1.000		
$\epsilon$	-0.479		0.878		
$2\epsilon$	-0.841		0.540		
$3\epsilon$	-0.997		0.071		
$4\epsilon$	-0.909		-0.416		
$5\epsilon$	-0.598		-0.801		
$6\epsilon$	-0.141		-0.990		
$7\epsilon$	0.351		-0.936		
$8\epsilon$	0.757		-0.654		
$9\epsilon$	0.978		-0.211		
$10\epsilon$	0.959		0.284		
$11\epsilon$	0.706		0.709		
$12\epsilon$	0.279		0.960		
$13\epsilon$	-0.215		0.977		
$14\epsilon$	-0.657		0.754		
$15\epsilon$	-0.938		0.347		
$16\epsilon$	-0.989		-0.146		
$17\epsilon$	-0.798		-0.602		
$18\epsilon$	-0.412		-0.911		

4. 一枚のミリ方眼紙に、横軸に  $x$ 、縦軸に  $v$  をとった  $v-x$  グラフを描きなさい。

5. 式 (2) を三角関数の公式  $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$  に代入することによって時刻  $t$  を消去した式を求めなさい。  
これが問 4. のグラフである。