番号　　　　　　　　　氏名

特殊相対論 No.12

運動方程式を解く (1) 自由落下運動 (動力学 No.6 参照)

$$
\begin{cases}
x_s(t+\epsilon) & = x_s(t) + \epsilon v_s\left(t+\dfrac{\epsilon}{2}\right) \\
v_s\left(t+\dfrac{\epsilon}{2}\right) & = v_s\left(t-\dfrac{\epsilon}{2}\right) + \epsilon g\left\{1-\left(v_s\left(t-\dfrac{\epsilon}{2}\right)/c\right)^2\right\}^{3/2}
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
x_n(t+\epsilon) & = x_n(t) + \epsilon v_n\left(t+\dfrac{\epsilon}{2}\right) \\
v_n\left(t+\dfrac{\epsilon}{2}\right) & = v_n\left(t-\dfrac{\epsilon}{2}\right) + \epsilon g
\end{cases}
$$

ここで，$\epsilon = 0.20$ s，$g = 1.0$ m/s^2，$c = 1.0$ m/s とし，小数第 4 位を四捨五入しなさい．

時刻 t	位置 $x_s(t)$	速さ $v_s(t)$	位置 $x_n(t)$	速さ $v_n(t)$
0	$x_s(0) = 0.0$	$v_s(0) = 0.0$	$x_n(0) = 0.0$	$v_n(0) = 0.0$
		$v_s(\frac{\epsilon}{2}) = v_s(0) + \frac{\epsilon}{2}g\left\{1-\left(\frac{v_s(0)}{c}\right)^2\right\}^{3/2}$		$v_n(\frac{\epsilon}{2}) = v_n(0) + \frac{\epsilon}{2}g$
ϵ	0.020	$= 0.100$	0.020	$= 0.100$
		0.287		0.300
2ϵ	0.077		0.080	
		0.447		0.500
3ϵ	0.166		0.180	
		0.573		0.700
4ϵ	0.281		0.320	
		0.669		0.900
5ϵ	0.414		0.500	
		0.740		1.100
6ϵ	0.562		0.720	
		0.793		1.300
7ϵ	0.720		0.980	
		0.832		1.500
8ϵ	0.887		1.280	
		0.862		1.700
9ϵ	1.059		1.620	
		0.885		1.900
10ϵ	1.236		2.000	
		0.903		2.100
11ϵ	1.417		2.420	
		0.917		2.300
12ϵ	1.600		2.880	
		0.928		2.500
13ϵ	1.786		3.380	
		0.938		2.700
14ϵ	1.973		3.920	
		0.945		2.900
15ϵ	2.162		4.500	
		*****		*****

1. $v-t$ グラフ，$x-t$ グラフをグラフ用紙に描きなさい．

2. 質量 m の物体に一定の力 $F = mg$ が働くときの，物体の運動方程式を解こう．

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\right) = F = mg \tag{1}$$

(a) 初期条件 ($t = 0$ のとき $v_0 = 0$) のとき運動方程式を t で積分して

$$v_s = \frac{gt}{\sqrt{1+\left(\frac{gt}{c}\right)^2}} \tag{2}$$

となることを示しなさい．

(b) 上の解について，$t \to \infty$ の極限を求めなさい．

(c) 上の解について，$c \to \infty$ の極限を求めなさい．(Newton 力学の解と一致するか？)

3. $v = \frac{dx}{dt}$ より，初期条件 ($t = 0$ のとき $x_0 = 0$) のもとで (2) 式を t について積分して

$$x_s = \frac{c^2}{g}\sqrt{1+\left(\frac{gt}{c}\right)^2} - \frac{c^2}{g} \tag{3}$$

となることを示しなさい．

(a) 式 (3) より漸近線を求め，問 **1.** で描いた $x - t$ グラフに漸近線を書き入れなさい．

(b) 上の解について，$c \to \infty$ の極限を求めなさい．(Newton 力学の解と一致するか？)
Hint：$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \cdots$ ($|x| < 1$ のとき)

4. 式 (2) より

(a) 物体の固有時 $\tau = \displaystyle\int_0^t dt\sqrt{1-(v_s/c)^2}$ を計算し，$w = ct$ を τ で表しなさい．
Hint：$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \sinh^{-1} x$

(b) $w = ct$ と $c\tau$ の大小関係を決めなさい．

(c) 式 (3) を τ で表しなさい．

(d) $u^0 = \frac{dw}{d\tau}$，$u^1 = \frac{dx}{d\tau}$ を計算し，$(u^0)^2 - (u^1)^2$ を求めなさい．

5. 今日の講義でわかったこと・わからなかったこと・感想などを書きなさい．(自由記載)