特殊相対論 No.12pre　特殊相対論的運動方程式

1　運動学

§1.1　固有時

光速度不変の原理から

$$(ct')^2 - (x')^2 = (ct)^2 - (x)^2 \tag{1}$$

が成り立つ．この式は，それぞれの系での原点との距離だが，微小だけ離れた二点の距離も同じ式を満たす．

$$c^2(dt')^2 - (dx')^2 = c^2(dt)^2 - (dx)^2 \tag{2}$$

この式を次のように変形する．

$$c^2(dt')^2 \left\{ 1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dx'}{dt'}\right)^2 \right\} = c^2(dt)^2 \left\{ 1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \right\} \tag{3}$$

左右両辺が等しいことから，この量はローレンツ変換しても値が変わらないのでローレンツ不変である．そこで，この量から**固有時** $d\tau$ をつくる．

$$c^2(d\tau)^2 \equiv c^2(dt)^2 \left\{ 1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \right\} \tag{4}$$

つまり

$$d\tau = dt\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \tag{5}$$

となる．ここで v は

$$v = \frac{dx}{dt} \tag{6}$$

であり，K 系からみた粒子の速度であり[1]，t は，K 系の座標系にいる人のもつ時刻である．この t を**座標時**ともいう．

§1.2　速度の合成則

特殊相対論 No.10-2 **1.**(a) より，速度の合成則は

$$v' = \frac{v - V}{1 - vV/c^2} \tag{7}$$

である．これから次の量を計算で求めた．

$$\frac{1}{\sqrt{1 - (v'/c)^2}} = \gamma\frac{1 - vV/c^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \tag{8}$$

ここで

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (V/c)^2}} \tag{9}$$

である[2]．

[1] このテキストでは，V と v をしっかりと区別して書く．つまり V は K 系からみた K' 系の速さとしてのみ使う．常に定数だと考えてください．また，v は K 系からみた物体の速さであり，v' は K 系からみた同じ物体の速さをあらわす．

[2] このテキストでは，γ という記号は速さが V のときだけ使用する．つまり，γ も定数です．

§1.3　四元速度

特殊相対論 No.10-2 **1.**(b) より，四元速度を

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \tag{10}$$

と定義する．ここで，$\mu = 0, 1$ ととり，$x^\mu = (x^0, x^1) = (w, x)$ である．具体的に書くと，

$$\begin{aligned} u^0 &= \frac{dw}{d\tau} = \frac{d(ct)}{dt\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{c}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \\ u^1 &= \frac{dx}{d\tau} = \frac{d(x)}{dt\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{v}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \end{aligned} \tag{11}$$

となる．この四元速度は，

$$\begin{aligned} u'^0 &= \gamma u^0 - \beta\gamma u^1 \\ u'^1 &= -\beta\gamma u^0 + \gamma u^1 \end{aligned} \qquad \text{または} \qquad \begin{pmatrix} u'^0 \\ u'^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix} \tag{12}$$

となって，$x^\mu = (w, x)$ と同様にローレンツ変換される．また，

$$c^2 = (u^0)^2 - (u^1)^2 \tag{13}$$

となる．

2　運動方程式

§2.1　四元運動量

物体の質量を m として，**四元運動量** $p^\mu = (p^0, p^1)$ を以下のように定義する．

$$p^0 = mu^0 = \frac{mc}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \tag{14}$$

$$p^1 = mu^1 = \frac{mv}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \tag{15}$$

ここで定義された四元運動量は次の性質を持っている．

1. $u^\mu = (u^0, u^1)$ の変換性より，$p^\mu = (p^0, p^1)$ は $x^\mu = (w, x)$ と同じローレンツ変換をする．

2. 次の節の議論より

$$p^0 = \frac{E}{c} \tag{16}$$

とおいて，E を**エネルギー**とする．

3. 式 (13) より，

$$m^2c^2 = (mu^0)^2 - (mu^1)^2 = (p^0)^2 - (p^1)^2 \tag{17}$$

したがって，

$$(p^0)^2 = (p^1)^2 + (mc)^2 \tag{18}$$

すなわち

$$p^0 = E/c = \sqrt{(p^1)^2 + (mc)^2} \tag{19}$$

となる[3]．

[3]負のエネルギーを持つ物体は無いので負号は捨てる．ただし，相対論的量子力学である Dirac 方程式では負のエネルギーを持つ物体を考えることになる．

4. 式 (15) より

$$(p^1)^2 = \frac{m^2v^2}{1-(v/c)^2} \tag{20}$$

これを v について解いて，

$$v = \frac{c^2p^1}{E} \tag{21}$$

この式は，

$$v = \frac{\partial E}{\partial p^1} \tag{22}$$

とも書くことができる．実際，式 (19) を p で微分して確かめることができる．この式 (22) は，Newton 力学でも成り立つ[4]．

§2.2　運動方程式

Newton 力学の運動方程式との整合性により

$$\frac{dp^1}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{mv}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\right) = F \tag{23}$$

を採用する．ここで，F は，Newton 力学ででてくる力である．左辺を微分して

$$\frac{m}{\{1-(v/c)^2\}^{3/2}}\frac{dv}{dt} = F \tag{24}$$

一方で，p^0 の運動方程式は

$$\frac{dp^0}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{mc}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\right) = \frac{v\cdot F}{c} \tag{25}$$

ここで，仕事率 $v\cdot F$ はエネルギーの変化分なので，エネルギー E として

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \tag{26}$$

したがって，

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\right) = v\cdot F \tag{27}$$

と書くことができる．以上から，

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{mc}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\right) &= \frac{v\cdot F}{c}\\ \frac{d}{dt}\left(\frac{mv}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\right) &= F\end{aligned} \tag{28}$$

両辺を $\sqrt{1-(v/c)^2}$ で割ると，

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau}\left(\frac{mc}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\right) &= \frac{v\cdot F}{c\sqrt{1-(v/c)^2}} \equiv f^0 = \frac{v\cdot f^1}{c}\\ \frac{d}{d\tau}\left(\frac{mv}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\right) &= \frac{F}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \equiv f^1\end{aligned} \tag{29}$$

四元力として

$$f^\mu = \left(f^0,\ f^1\right) = \left(\frac{v\cdot f^1}{c},\ f^1\right) \tag{30}$$

[4] Newton 力学では $E = \frac{m}{2}v^2 = \frac{p^2}{2m}$ より，$\frac{\partial E}{\partial p} = \frac{p}{m} = v$ となる．

とすると，運動方程式は

$$\frac{dp^0}{d\tau} = f^0, \qquad \frac{dp^1}{d\tau} = f^1 \tag{31}$$

と書くことができる．これをまとめて，

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = f^\mu \tag{32}$$

と書くことができる．これを**四元運動方程式**という．

3　双曲線関数

§3.1　双曲線関数

指数関数から次のように定義される関数を**双曲線関数**という．

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2i} \tag{33}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \tag{34}$$

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{\sinh x}{\cosh x} \tag{35}$$

具体的に計算してみると，

$$\cosh x \pm \sinh x = e^{\pm x} \tag{36}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \tag{37}$$

という関係がある．

§3.2　逆双曲線関数と微積分

式 (33) の逆関数を求めると，

$$\sinh^{-1} x = \mathrm{arcsinh}\ x = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) \tag{38}$$

となる．これを微分すると

$$\frac{d}{dx}\sinh^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \tag{39}$$

となるので，

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \sinh^{-1} x + (\text{積分定数}) \tag{40}$$

となる．ちなみに

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \sqrt{1+x^2} + (\text{積分定数}) \tag{41}$$

である．