番号　　　　　　　　　　氏名

特殊相対論 No.13

運動方程式を解く (2) 鉛直投げ上げ (動力学 No.8 参照)

$$
\begin{cases}
x_s(t+\epsilon) & = x_s(t) + \epsilon v_s\left(t+\dfrac{\epsilon}{2}\right) \\
v_s\left(t+\dfrac{\epsilon}{2}\right) & = v_s\left(t-\dfrac{\epsilon}{2}\right) - \epsilon g\left\{1-\left(v_s\left(t-\dfrac{\epsilon}{2}\right)/c\right)^2\right\}^{3/2}
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
x_n(t+\epsilon) & = x_n(t) + \epsilon v_n\left(t+\dfrac{\epsilon}{2}\right) \\
v_n\left(t+\dfrac{\epsilon}{2}\right) & = v_n\left(t-\dfrac{\epsilon}{2}\right) - \epsilon g
\end{cases}
$$

ここで，$\epsilon = 0.20$ s，$g = 1.0$ m/s^2，$c = 1.0$ m/s とし，小数第 4 位を四捨五入しなさい．

時刻 t	位置 $x_s(t)$	速さ $v_s(t)$	位置 $x_n(t)$	速さ $v_n(t)$
0	$x_s(0) = 0.0$	$v_s(0) = 0.6$	$x_n(0) = 0.0$	$v_n(0) = 0.6$
		$v_s(\frac{\epsilon}{2}) = v_s(0) - \frac{\epsilon}{2}g\left\{1-\left(\frac{v_s(0)}{c}\right)^2\right\}^{3/2}$		$v_n(\frac{\epsilon}{2}) = v_n(0) - \frac{\epsilon}{2}g$
ϵ	0.109	$= 0.545$	0.100	$= 0.500$
		0.410		0.300
2ϵ	0.191		0.160	
		0.243		0.100
3ϵ	0.239		0.180	
		0.050		-0.100
4ϵ	0.249		0.160	
		-0.148		-0.300
5ϵ	0.219		0.100	
		-0.330		-0.500
6ϵ	0.153		0.000	
		-0.482		-0.700
7ϵ	0.057		-0.140	
		-0.600		-0.900
8ϵ	-0.062		-0.320	
		-0.689		-1.100
9ϵ	-0.200		-0.540	
		-0.755		-1.300
10ϵ	-0.351		-0.800	
		-0.804		-1.500
11ϵ	-0.511		-1.100	
		-0.840		-1.700
12ϵ	-0.679		-1.440	
		-0.868		-1.900
13ϵ	-0.853		-1.820	
		-0.890		-2.100
14ϵ	-1.031		-2.240	
		-0.907		-2.300
15ϵ	-1.212		-2.700	
		*****		*****

1. $v-t$ グラフ，$x-t$ グラフをグラフ用紙に描きなさい．

2. 質量 m の物体に一定の力 $F=-mg$ が働くときの運動方程式を解こう.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\right)=F=-mg \tag{1}$$

(a) 初期条件 ($t=0$ のとき $v_0=+0.6c$) のとき t で積分して

$$\frac{v_s}{c}=\frac{\frac{v_0/c}{\sqrt{1-(v_0/c)^2}}-\frac{gt}{c}}{\sqrt{1+\left(\frac{v_0/c}{\sqrt{1-(v_0/c)^2}}-\frac{gt}{c}\right)^2}} \tag{2}$$

となることを示しなさい.

(b) 式 (2) について，$t\to\infty$ の極限を求めなさい.

(c) 式 (2) について，$c\to\infty$ の極限を求めなさい.（Newton 力学の解と一致するか?)

3. $v=\frac{dx}{dt}$ より，初期条件 ($t=0$ のとき $x_0=0$) のもとで (2) 式を t について積分して

$$x_s=\frac{c^2}{g}\frac{1}{\sqrt{1-(v_0/c)^2}}-\frac{c^2}{g}\sqrt{1+\left(\frac{v_0/c}{\sqrt{1-(v_0/c)^2}}-\frac{gt}{c}\right)^2} \tag{3}$$

となることを示しなさい.

(a) 式 (3) より漸近線を求め，問 **1.** で描いた $x-t$ グラフに漸近線を書き入れなさい.

(b) 式 (3) について，$c\to\infty$ の極限を求めなさい.（Newton 力学の解と一致するか？)

4. 上に描いたグラフより次の座標を求めなさい.

(a) w 軸との交点 A の座標 w_A を求めなさい.

(b) 地球から最も遠ざかった点 B の時間座標は $2w_B=w_A$ であることから，x_B を求めなさい.

5. 式 (2) から物体の固有時 τ

$$\tau = \int_0^t dt \sqrt{1 - (v_s/c)^2} \tag{4}$$

を計算し，$w = ct$ と x を τ で表しなさい．
Hint：$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \sinh^{-1} x$

6. x_B のときの物体の固有時を τ_B とする．物体の座標 (w, x) を τ_B を使ってあらわすと

$$w = \frac{c^2}{g}\left[\sinh\left(\frac{g}{c}\tau_B\right) + \sinh\left(\frac{g}{c}\tau - \frac{g}{c}\tau_B\right)\right] \tag{5}$$

$$x = \frac{c^2}{g}\left[\cosh\left(\frac{g}{c}\tau_B\right) - \cosh\left(\frac{g}{c}\tau - \frac{g}{c}\tau_B\right)\right] \tag{6}$$

となることを示しなさい．

7. 物体が地球に戻る時刻は，物体の固有時で $\tau_A = 2\tau_B$ である．w_A と $c\tau_A$ の大小関係を決定しなさい．

番号　　　　　　　氏名

特殊相対論 No.13-2 ふたごのパラドックス

1. ロケット君は時刻 $t = 0$ に速さ $+0.6c$ で地球を出発し，$x = 3$ m の点 B で向きを逆にし，速さ $-0.6c$ で地球に戻ってくる．地球に戻ったときを A 点とする．

(a) この時空図を描きなさい．

(b) ロケット君が地球に戻ってきたとき，地上君の時刻 w_A は何光秒か．

(c) ロケット君の世界線の長さ（ロケット君の固有時）$c\tau_A$ は何光秒か．
$\beta = 0.6$ のとき $\alpha_s = \sqrt{\dfrac{1+\beta^2}{1-\beta^2}} = 1.46$ を使う．

2. ふたごのパラドックスは，パラドックスか？

3. 今日の講義でわかったこと・わからなかったこと・感想などを書きなさい．(自由記載)