

特殊相対論 No.14 運動量とエネルギー

相対論的自由落下運動に対する運動方程式

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{mv}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \right) = F = mg \text{ (定数)} \quad (1)$$

を初期条件 ($t = 0$ のとき $x_0 = v_0 = 0$) で積分して

$$x_s = \frac{c^2}{g} \sqrt{1 + \left(\frac{gt}{c} \right)^2} - \frac{c^2}{g}, \quad v_s = \frac{gt}{\sqrt{1 + \left(\frac{gt}{c} \right)^2}} \quad (2)$$

となった。これから運動量とエネルギー

$$p_s = \frac{mv_s}{\sqrt{1 - (v_s/c)^2}}, \quad E_s = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - (v_s/c)^2}} \quad (3)$$

を求めよう。

ニュートン力学では … 自由落下運動に対する運動方程式

$$m \frac{dv}{dt} = F = mg \quad (4)$$

を初期条件 ($t = 0$ のとき $x_0 = v_0 = 0$) で積分して

$$x_n = \frac{g}{2} t^2, \quad v_n = gt \quad (5)$$

となった。これから運動量と力学的エネルギー

$$p_n = mv_n, \quad E_n = \frac{m}{2} v_n^2 \quad (6)$$

を求めよう。

1. 表1と表2の空欄をうめなさい. $\epsilon = 0.20$, $m = g = c = 1$, $F = mg = 1$ とし, 小数第4位を四捨五入しなさい.
2. 表1と表2から, 縦軸にエネルギー E/c , 横軸に運動量 p をとった $E/c - p$ グラフを描きなさい.
3. 式(3)よりエネルギーを運動量で書きなおすと

$$E_s = \sqrt{p_s^2 c^2 + m^2 c^4} \quad (7)$$

となる. $v \ll c$ のとき, (3)と(7)を展開しなさい.

Hint : $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \dots (|x| < 1 \text{ のとき})$

4. 式(3)より粒子が静止している ($v = 0$) ときのエネルギー E_s は,

$$E_s = mc^2 \quad (8)$$

と表される. これを静止エネルギーという.

- (a) 物質 1 g の静止エネルギーは何 J か.
- (b) 0°C の水 1 kg を沸騰させるのに 420 kJ のエネルギーが必要とされる. 上の静止エネルギーは, 水何 kg を沸騰させることができるか.
- (c) 電子の質量は $m_e = 9.11 \times 10^{-31}$ kg である. 電子の静止エネルギーは何 MeV か.

5. 次の連立微分方程式

$$\begin{cases} \frac{dp_s}{dt} = F \\ \frac{dE_s}{dt} = v_s F = \frac{p_s c^2}{E_s} F \end{cases} \quad (9)$$

を F を消去することによって解きなさい. 初期条件は $t = 0$ のとき $v_s = 0$ より, $p_s = 0$, $E_s = mc^2$ である.

6. 今日の講義でわかったこと・わからなかったこと・感想などを書きなさい. (自由記載)

表 1: 特殊相対論的運動量とエネルギー

| t | x_s | v_s | $p_s = \frac{mv_s}{\sqrt{1-(v_s/c)^2}}$ | Δp_s | $F\Delta t$ | $E_s = \frac{mc^2}{\sqrt{1-(v_s/c)^2}}$ | ΔE_s | $F\Delta x_s$ |
|--------------|-------|-------|---|--------------|-------------|---|--------------|---------------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | ***** | ***** | 1 | ***** | ***** |
| | | | | 0.2 | 0.2 | | 0.020 | 0.020 |
| ϵ | 0.020 | 0.196 | 0.200 | | | 1.020 | | |
| | | | | 0.2 | 0.2 | | 0.057 | 0.057 |
| 2ϵ | 0.077 | 0.371 | 0.400 | | | 1.077 | | |
| | | | | 0.2 | 0.2 | | 0.089 | 0.089 |
| 3ϵ | 0.166 | 0.514 | 0.600 | | | 1.166 | | |
| | | | | 0.2 | 0.2 | | 0.115 | 0.115 |
| 4ϵ | 0.281 | 0.625 | 0.800 | | | 1.281 | | |
| | | | | 0.2 | 0.2 | | 0.133 | 0.133 |
| 5ϵ | 0.414 | 0.707 | 1.000 | | | 1.414 | | |
| | | | | 0.2 | 0.2 | | 0.148 | 0.148 |
| 6ϵ | 0.562 | 0.768 | 1.200 | | | 1.562 | | |
| | | | | 0.2 | 0.2 | | 0.158 | 0.158 |
| 7ϵ | 0.720 | 0.814 | 1.400 | | | 1.720 | | |
| | | | | 0.2 | 0.2 | | 0.167 | 0.167 |
| 8ϵ | 0.887 | 0.848 | 1.600 | | | 1.887 | | |
| | | | | 0.2 | 0.2 | | 0.172 | 0.172 |
| 9ϵ | 1.059 | 0.874 | 1.800 | | | 2.059 | | |
| | | | | 0.2 | 0.2 | | 0.177 | 0.177 |
| 10ϵ | 1.236 | 0.894 | 2.000 | | | 2.236 | | |
| | | | | 0.2 | 0.2 | | 0.181 | 0.181 |
| 11ϵ | 1.417 | 0.910 | 2.200 | | | 2.417 | | |
| | | | | 0.2 | 0.2 | | 0.183 | 0.183 |
| 12ϵ | 1.600 | 0.923 | 2.400 | | | 2.600 | | |
| | | | | 0.2 | 0.2 | | 0.186 | 0.186 |
| 13ϵ | 1.786 | 0.933 | 2.600 | | | 2.786 | | |
| | | | | 0.2 | 0.2 | | 0.187 | 0.187 |
| 14ϵ | 1.973 | 0.942 | 2.800 | | | 2.973 | | |
| | | | | 0.2 | 0.2 | | 0.189 | 0.189 |
| 15ϵ | 2.162 | 0.949 | 3.000 | | | 3.162 | | |
| | | | | ***** | ***** | | ***** | ***** |

表 2: ニュートン力学的運動量とエネルギー

| t | x_n | v_n | $p_n = mv_n$ | Δp_n | $F\Delta t$ | $E_n = \frac{m}{2}v_n^2$ | ΔE_n | $F\Delta x_n$ |
|--------------|-------|-------|--------------|--------------|-------------|--------------------------|--------------|---------------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | ***** | ***** | 0 | ***** | ***** |
| | | | | 0.2 | 0.2 | | 0.02 | 0.02 |
| ϵ | 0.020 | 0.200 | 0.200 | | | 0.020 | | |
| | | | | 0.2 | 0.2 | | 0.04 | 0.04 |
| 2ϵ | 0.080 | 0.400 | 0.400 | | | 0.080 | | |
| | | | | 0.2 | 0.2 | | 0.10 | 0.10 |
| 3ϵ | 0.180 | 0.600 | 0.600 | | | 0.180 | | |
| | | | | 0.2 | 0.2 | | 0.14 | 0.14 |
| 4ϵ | 0.320 | 0.800 | 0.800 | | | 0.320 | | |
| | | | | 0.2 | 0.2 | | 0.18 | 0.18 |
| 5ϵ | 0.500 | 1.000 | 1.000 | | | 0.500 | | |
| | | | | 0.2 | 0.2 | | 0.22 | 0.22 |
| 6ϵ | 0.720 | 1.200 | 1.200 | | | 0.720 | | |
| | | | | 0.2 | 0.2 | | 0.26 | 0.26 |
| 7ϵ | 0.980 | 1.400 | 1.400 | | | 0.980 | | |
| | | | | 0.2 | 0.2 | | 0.30 | 0.30 |
| 8ϵ | 1.280 | 1.600 | 1.600 | | | 1.280 | | |
| | | | | 0.2 | 0.2 | | 0.34 | 0.34 |
| 9ϵ | 1.620 | 1.800 | 1.800 | | | 1.620 | | |
| | | | | 0.2 | 0.2 | | 0.38 | 0.38 |
| 10ϵ | 2.000 | 2.000 | 2.000 | | | 2.000 | | |
| | | | | 0.2 | 0.2 | | 0.42 | 0.42 |
| 11ϵ | 2.420 | 2.200 | 2.200 | | | 2.420 | | |
| | | | | 0.2 | 0.2 | | 0.46 | 0.46 |
| 12ϵ | 2.880 | 2.400 | 2.400 | | | 2.880 | | |
| | | | | 0.2 | 0.2 | | 0.50 | 0.50 |
| 13ϵ | 3.380 | 2.600 | 2.600 | | | 3.380 | | |
| | | | | 0.2 | 0.2 | | 0.54 | 0.54 |
| 14ϵ | 3.920 | 2.800 | 2.800 | | | 3.920 | | |
| | | | | 0.2 | 0.2 | | 0.58 | 0.58 |
| 15ϵ | 4.500 | 3.000 | 3.000 | | | 4.500 | | |
| | | | | ***** | ***** | | ***** | ***** |