§2.3.3

問題A

1 $$\frac{m}{2}v_2^2 - \frac{m}{2}v_1^2 = \int_{x_1}^{x_2} (-mg)\,dx$$

$$= -mgx\Big|_{x_1}^{x_2} = -mgx_2 + mgx_1$$

よって. $$\frac{m}{2}v_2^2 + mgx_2 = \frac{m}{2}v_1^2 + mgx_1$$

2 $$\frac{m}{2}v_2^2 - \frac{m}{2}v_1^2 = \int_{x_1}^{x_2} (-kx)\,dx$$

$$= -\frac{k}{2}x^2\Big|_{x_1}^{x_2} = -\frac{k}{2}x_2^2 + \frac{k}{2}x_1^2$$

よって

$$\frac{m}{2}v_2^2 + \frac{k}{2}x_2^2 = \frac{m}{2}v_1^2 + \frac{k}{2}x_1^2$$

問題B

1 (1)

$F = mg = G\dfrac{Mm}{R^2}$ より $g = G\dfrac{M}{R^2} = 6.7\times10^{-11} \times \dfrac{6.0\times10^{24}}{(6400\times10^3)^2} = 9.8\ \mathrm{m/s^2}$

(2.25)式の両辺に v をかける。

(2)

$$v\frac{dv}{dt} = -\frac{GM}{(x+R)^2}\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{v^2}{2}\right] = -\frac{GM}{(x+R)^2}\frac{dx}{dt}$$

両辺tで積分

$$\frac{v^2}{2} = -GM\int\frac{dx}{(x+R)^2} = +GM\frac{1}{x+R} + C\ (積分定数)$$

初期条件から $\dfrac{v_0^2}{2} = \dfrac{GM}{R} + C$ $\therefore C = \dfrac{v_0^2}{2} - \dfrac{GM}{R}$

よって.

$$\frac{v^2}{2} = \frac{GM}{x+R} + \frac{v_0^2}{2} - \frac{GM}{R} = \frac{gR^2}{x+R} + \frac{v_0^2}{2} - \frac{gR^2}{R}$$

$$\therefore v^2 = v_0^2 + \frac{2gR}{x+R} - 2gR$$

(3) $$v^2 = v_0^2 + \frac{2gR}{x+R} - 2gR \longrightarrow v_0^2 - 2gR \geq 0$$

より

$$v_0 \geq \sqrt{2gR} = \sqrt{2\cdot 9.81\cdot 6400\times10^3} = 11.2\times10^3\ \mathrm{m/s} = 11.2\ \mathrm{km/s}$$