§9. 強制振動（摩擦なし）

振動運動に外部から強制的な力 $F(t)$ が加わる。

Newtonの運動方程式は、

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx + F(t)$$

$F(t)$ は周期的な力とし、$F(t) = f\cos\omega t$ とする。

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx + f\cos\omega t$$

または
$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x + f_0\cos\omega t \qquad \left(\omega_0^2 = \frac{k}{m},\ f_0 = \frac{f}{m} \text{ とする。}\right)$$

$$\Downarrow$$

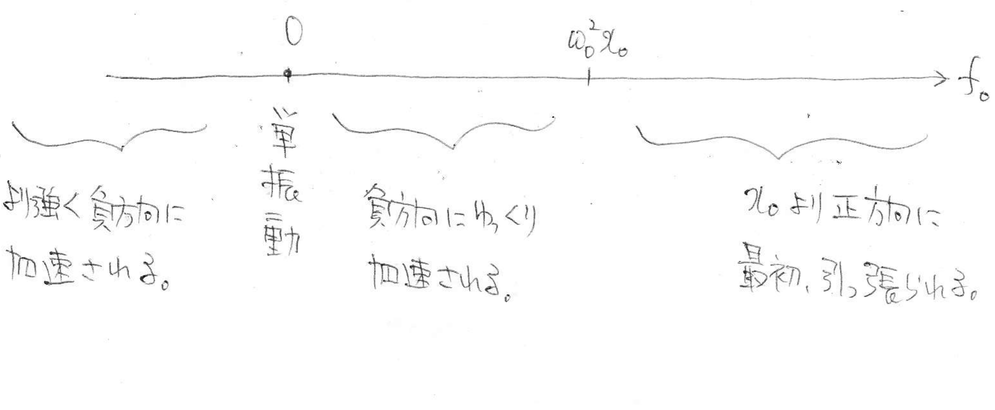
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = v \\ \dfrac{dv}{dt} = -\omega_0^2 x + f_0\cos\omega t \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \displaystyle\lim_{\epsilon\to 0}\frac{x(t+\epsilon)-x(t)}{\epsilon} = v(t) \\ \displaystyle\lim_{\epsilon\to 0}\frac{v(t+\epsilon)-v(t)}{\epsilon} = -\omega_0^2 x + f_0\cos\omega t \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} x(t+\epsilon) = x(t) + \epsilon v(t) \\ v(t+\epsilon) = v(t) + \epsilon\left\{-\omega_0^2 x + f_0\cos\omega t\right\} \end{cases}$$



番号　　　　　　　　氏名

動力学 No.16　運動方程式を解く (11) 強制振動（摩擦なし）

$$
\begin{cases}
x(t+\epsilon) & = x(t) + \epsilon\, v\left(t+\dfrac{\epsilon}{2}\right) \\
v\left(t+\dfrac{\epsilon}{2}\right) & = v\left(t-\dfrac{\epsilon}{2}\right) + \epsilon\, a(t)
\end{cases}
$$

ここで，$a(t) = -\omega_0^2 x(t) + f_0 \cos\omega t$ である．

また，$\epsilon = 0.50$ s，$f_0 = 0.50$ m/s^2，$\omega = \omega_0 = 1.0$ s^{-1} とし，小数第4位を四捨五入しなさい．

1. $x - t$ グラフを描きなさい．

2. 振幅の増大する割合をグラフから求めなさい．

赤い線の傾き
0.30

本当は $\dfrac{f_0}{2\omega_0} = \dfrac{1}{4} = 0.25$

3. Newton の運動方程式

$$
\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 \overset{x}{\cancel{\frac{dx}{dt}}} + f_0 \cos\omega t \tag{1}
$$

の解 x は，一般解 x_0 と特解 x_1 の和として表される．

$x = x_0 + x_1$

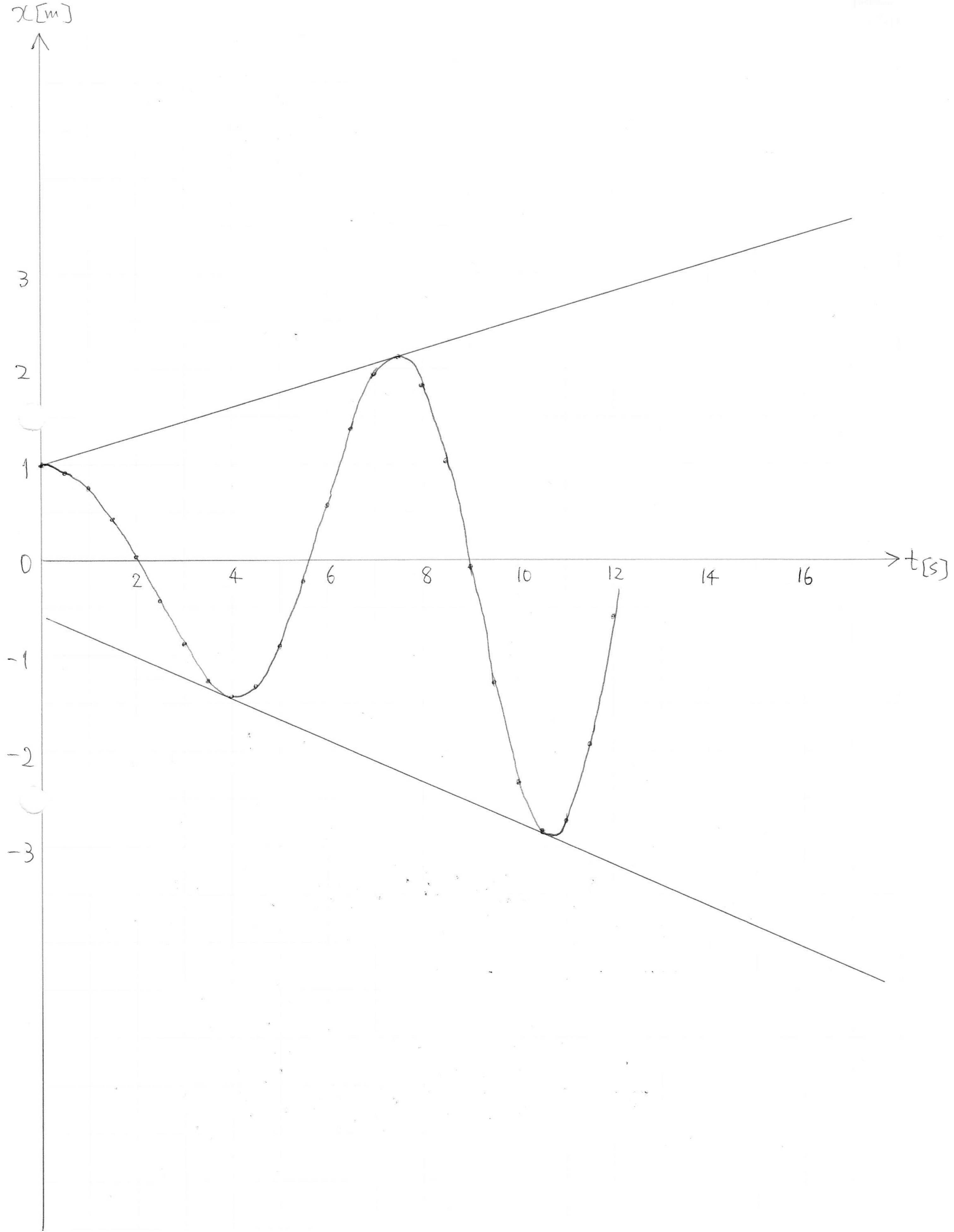
$$
x = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t + \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2}\cos\omega t \tag{2}
$$

このとき，$\omega \to \omega_0$ で $x \to \infty$ となる．ここで，$A = \frac{f_0}{\omega^2 - \omega_0^2}$ として解 x を線形化しなさい．

4. 日常生活の中で，強制振動の例をあげ説明しなさい．

時刻 t〔s〕	位置 $x(t)$〔m〕	速さ $v(t)$〔m/s〕	加速度 $a(t)$〔m/s^2〕
0	$x(0) = 1.0$	$v(0) = 0.0$ $v(\frac{\epsilon}{2}) = v(0) + \frac{\epsilon}{2}a(0)$ $= -0.125$	$a(0) = -0.50$
ϵ	+0,938	−0.374	−0.499
2ϵ	0,751	−0.614	−0.480
3ϵ	0,444	−0.818	−0.408
4ϵ	0,035	−0.939	−0.242
5ϵ	−0,435	−0.922	0.035
6ϵ	−0,896	−0.721	0.402
7ϵ	−1,257	−0.327	0.789
8ϵ	−1,421	0.220	1.094
9ϵ	−1,311	0.823	1.205
10ϵ	−0,900	1.343	1.041
11ϵ	−0,229	1.634	0.582
12ϵ	0,588	1.579	−0.109
13ϵ	1,378	1.134	−0.891
14ϵ	1,945	0.349	−1.569
15ϵ	2,120	−0.624	−1.947
16ϵ	1,808	−1.565	−1.881
17ϵ	1,026	−2.228	−1.327
18ϵ	−0,088	−2.412	−0.367
19ϵ	−1,294	−2.014	0.796
20ϵ	−2,301	−1.073	1.882
21ϵ	−2,838	0.227	2.600
22ϵ	−2,725	1.590	2.727
23ϵ	−1,930	2.676	2.171
24ϵ	−0,592	*****	1.013

5. 今日の講義でわかったこと・わからなかったこと・感想などを書きなさい．(自由記載)


x [m]
3
2
1
0
-1
-2
-3
t [s]
2
4
6
8
10
12
14
16

微分方程式を解く

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = f_0 \cos\omega t$$

(i) 同次方程式 $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$ の解（一般解）は、A, Bを定数として、

$$x_0 = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$$

(ii) 非同次方程式の解（特解）$x_1 = C\cos\omega t$ とおいて

$$-\omega^2 C\cos\omega t + \omega_0^2 C\cos\omega t = f_0\cos\omega t$$

$$(\omega_0^2 - \omega^2)C = f_0$$

$$\therefore C = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

(iii) 微分方程式の解は、$x = x_0 + x_1$ で与えられる。

①

$$x = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t + \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2}\cos\omega t \longrightarrow \infty \quad (\omega \to \omega_0)$$

ここで、$A = \frac{f_0}{\omega^2 - \omega_0^2}$ とおくと、

$$x = B\sin\omega_0 t + \frac{f_0}{\omega^2 - \omega_0^2}\cos\omega_0 t - \frac{f_0}{\omega^2 - \omega_0^2}\cos\omega t$$

$$= B\sin\omega_0 t - \frac{f_0}{\omega + \omega_0}\,\frac{\cos\omega t - \cos\omega_0 t}{\omega - \omega_0}$$

$$\longrightarrow B\sin\omega_0 t - \frac{f_0}{2\omega_0}\left(-t\sin\omega_0 t\right) \quad (\omega \to \omega_0)$$

$$= B\sin\omega_0 t + \frac{f_0}{2\omega_0}t\sin\omega_0 t$$ ……振幅が時間とともに線形に増大する。

これを『共鳴』または『共振』という。

resonance

うなり

①式において、　$\omega = \omega_0 + \delta$ とすると、

$$x = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t + \frac{f_0}{-2\delta\omega_0 - \delta^2}\cos(\omega_0 + \delta)t$$

$$\fallingdotseq A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t - \frac{f_0}{2\delta\omega_0}\left(\cos\omega_0 t\cos\delta t - \sin\omega_0 t\sin\delta t\right)$$

δ^2は落とす

$$= \left(A - \frac{f_0\cos\delta t}{2\delta\omega_0}\right)\cos\omega_0 t + \left(B + \frac{f_0\sin\delta t}{2\delta\omega_0}\right)\sin\omega_0 t$$

$$\equiv D\cos(\omega_0 t - \varphi)$$ とムリヤリ書く。

ここで、

$$\tan\varphi = + \frac{B + \frac{f_0}{2\delta\omega_0}\sin\delta t}{A - \frac{f_0}{2\delta\omega_0}\cos\delta t}$$

$$D = \sqrt{\left(A - \frac{f_0}{2\delta\omega_0}\cos\delta t\right)^2 + \left(B + \frac{f_0}{2\delta\omega_0}\sin\delta t\right)^2}$$

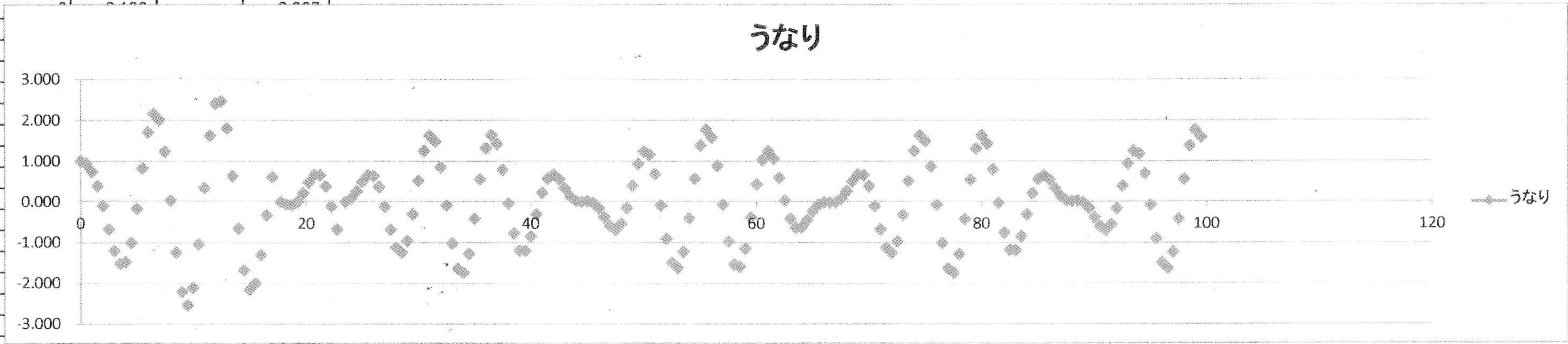
……振幅が時間とともに振動する。

『うなり』という。

beat

時刻	位置	速さ	加速度
0	1.000	0.000	−0.500
0.25		−0.125	
0.5	0.938		−0.539
0.75		−0.395	
1	0.740		−0.606
1.25		−0.698	
1.5	0.391		−0.576
1.75		−0.986	

$\varepsilon =$	0.5	うなり
$\omega=$	1.3	
f_0=	0.5	



時刻	位置	速さ	加速度
6	1.707		−1.680
6.25		0.914	
6.5	2.164		−2.444
6.75		−0.308	
7	2.009		−2.483
7.25		−1.550	
7.5	1.235		−1.708
7.75		−2.404	
8	0.033		−0.313
8.25		−2.561	
8.5	−1.248		1.275
8.75		−1.923	
9	−2.209		2.533
9.25		−0.657	
9.5	−2.537		3.026
9.75		0.856	
10	−2.109		2.563
10.25		2.138	
10.5	−1.040		1.274
10.75		2.775	
11	0.347		−0.428
11.25		2.561	
11.5	1.628		−1.991
11.75		1.566	
12	2.410		−2.907