番号　　　　　　　　氏名

動力学 No.19 エネルギー保存則 (2)

1. 速さ 6.0 m/s でボールを地上から真上に投げ上げたとき，最高点までの高さは何 m か．(エネルギー保存則の立場から解答しなさい．動力学 No.2 **3.**(c) 参照)

$mgx = \frac{m}{2}v^2$ より

$$x = \frac{v^2}{2g} = \frac{6^2}{2\times9.8} = 1.836 \fallingdotseq 1.8\,\mathrm{m}$$

2. スキーヤーが高さ 20 m の丘をすべりおりた．丘の下まできたときの速さは何 m/s か．

$\frac{m}{2}v^2 = mgh$ より

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2\times9.8\times20} = 19.79 \fallingdotseq 20\,\mathrm{m/s}$$

3. ハイジャンプの選手が，2.10 m のバーを 0.80 m/s の速さで越えるためには，何 m/s 以上の助走が必要か．

$\frac{m}{2}v'^2 = \frac{m}{2}v^2 + mgh$ より

$$v' = \sqrt{v^2 + 2gh} = \sqrt{0.8^2 + 2\times9.8\times2.1} = 6.465 \fallingdotseq 6.5\,\mathrm{m/s} = 23.4\,\mathrm{km/h}$$

4. 質量 $m = 1000$ kg の自動車が速さ $v = 40$ km/h で走っている．

(a) この自動車の運動エネルギーは何 J か．

$$\frac{m}{2}v^2 = \frac{1000}{2}\times\left(40\times\frac{1000}{60\times60}\right)^2 = 61728 \fallingdotseq 6.2\times10^4\,\mathrm{J}$$

(b) 自動車がこの速さのまま坂道に入りエンジンを切ったとき，坂道を何 m の高さまで登ることができるか．(Hint：運動エネルギーが，すべて位置エネルギーに変わったと考える．)

$mgh = \frac{mv^2}{2}$ より $h = \frac{61728}{1000\times9.8} = 6.298 \fallingdotseq 6.3\,\mathrm{m}$

(c) 1.0 kg の水を 1.0 °C 上げるのに，4.2 kJ のエネルギーが必要である．この自動車の運動エネルギーがすべて熱のエネルギーになったとすると，1.0 kg の水の温度は何 °C 上がるか．

$$\left.\begin{array}{l} 1^\circ\mathrm{C} \text{ —— } 4200\,\mathrm{J} \\ x^\circ\mathrm{C} \text{ —— } 61728\,\mathrm{J} \end{array}\right\} x = \frac{61728}{4200} = 14.697 \fallingdotseq 15\,^\circ\mathrm{C}$$

5. バネによる力 $F = -kx$ が働くときの運動について考える．運動方程式は

$$m\frac{dv}{dt} = -kx$$

と書かれている．ここで，$\frac{k}{m} = 1.0\ \mathrm{s}^{-2}$ とする．

(a) 両辺に速さ $v = \frac{dx}{dt}$ をかけて，エネルギー積分を実行しなさい．積分定数を E として，エネルギー保存則を導きなさい．

$$v\frac{dv}{dt} = -x\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{v^2}{2} + \frac{x^2}{2}\right] = 0$$

$$\frac{v^2}{2} + \frac{x^2}{2} = E\ (\text{積分定数})$$

(b) もう一度 t で積分して，位置 $x(t)$ を求めなさい．積分定数を φ とする．

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + x^2 = 2E$$

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{2E - x^2}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2E - x^2}} = \int dt$$

$$= t + \varphi\ (\text{積分定数})$$

$x = \sqrt{2E}\sin\theta$ とおくと $dx = \sqrt{2E}\cos\theta\, d\theta$

$$\int \frac{\sqrt{2E}\cos\theta\, d\theta}{\sqrt{2E - 2E\sin^2\theta}} = t + \varphi$$

$$\int d\theta = \theta = \sin^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2E}}\right) = t + \varphi$$

したがって

$$x = \underbrace{\sqrt{2E}}_{\text{振幅}}\sin(t + \underbrace{\varphi}_{\text{初期位相}})$$

(c) 三角関数の加法定理 $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ を使い，上で求めた $x(t)$ が

$$x(t) = A\cos t + B\sin t$$

となることを示しなさい．

$$x = \underbrace{\sqrt{2E}\sin t\cos\varphi}_{B} + \underbrace{\sqrt{2E}\cos t\sin\varphi}_{A} = A\cos t + B\sin t$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\sin t + B\cos t$$

(d) 初期条件 $x(0) = 1$，$v(0) = 0$ より位置 $x(t)$ を求めなさい．(動力学 No.12 **3.** 参照)

$$\left.\begin{array}{l} x(0) = A = 1 \\ v(0) = B = 0 \end{array}\right\} \quad x(t) = \cos t$$

6. 今日の講義でわかったこと・わからなかったこと・感想などを書きなさい．(自由記載)