

物理学 No.15 フーリエ級数

1. $f(x) = x$ ($-\pi < x < \pi$) のフーリエ級数展開

$$x = a_0 + a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x + a_4 \sin 4x + a_5 \sin 5x + \dots \quad (1)$$

を考えよう.

(a) $a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$ を求めなさい.

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x dx = 0$$

(b) $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$ を求めなさい.

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx dx = -\frac{2}{n} \cos n\pi$$

(c) a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 までの級数を具体的に書き出さなさい.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
2	-1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$

2. 上の式 (1) のフーリエ級数展開の第5項までを書き下しなさい.

$$f(x) = x = 2\sin x - \sin 2x + \frac{2}{3}\sin 3x - \frac{1}{2}\sin 4x + \frac{2}{5}\sin 5x$$

3. $f(x) = x$ のフーリエ級数展開の最初の3項をとり、合成波を描いてみよう。次の表の数値を計算しなさい。各数値は、少数第3位を四捨五入しなさい。合成波のグラフをグラフ用紙に描きなさい。

$$\text{合成波} = 2 \sin x - \sin 2x + \frac{2}{3} \sin 3x$$

x	$-\frac{7\pi}{6}$	$-\pi$	$-\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{6}$	0.0	$+\frac{\pi}{6}$	$+\frac{\pi}{3}$	$+\frac{\pi}{2}$	$+\frac{2\pi}{3}$	$+\frac{5\pi}{6}$	$+\pi$	$+\frac{7\pi}{6}$
$2 \sin x$	1	0	-1	-1.73	-2	-1.73	-1	0	1	1.73	2	1.73	1	0	-1
$-\sin 2x$	0.87	0	-0.87	-0.87	0	0.87	0.87	0	-0.87	-0.87	0	0.87	0.87	0	-0.87
$\frac{2}{3} \sin 3x$	0.67	0	-0.67	0	0.67	0	-0.67	0	0.67	0	-0.67	0	0.67	0	-0.67
合成	2.54	0	-2.54	-2.60	-1.33	-0.86	-0.8	0	0.8	0.86	1.33	2.60	2.54	0	-2.54

4. 今日の講義でわかったこと・わからなかったこと・感想など書きなさい。また、午後の実験についても感想など書きなさい。(自由記載)