番号　　　　　　　氏名

量子力学 No. 0 vectors, matrices and their products

1. 行列とベクトル

以下の行列とベクトルの成分は，すべて複素数である．$*$は，複素共役（complex conjugate）を表す．

(a) 行列

$$A \doteq \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad B \doteq \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \tag{1}$$

(b) エルミート共役（Hermitian adjoint）

$$A^\dagger = \begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix} \tag{2}$$

(i) $A^\dagger = A$ の行列を，エルミート演算子（Hermitian operator）という．

(ii) $A^\dagger A = AA^\dagger = 1$ または $A^\dagger = A^{-1}$ の行列を，ユニタリー演算子（Unitary operator）という．

(c) ケットベクトル（ket vector）

$$|\alpha\rangle \doteq \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad |\beta\rangle \doteq \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \tag{3}$$

に双対（dual）なベクトルをブラベクトル（bra vector）という．

$$\langle\alpha| \doteq \begin{pmatrix} x^* & y^* \end{pmatrix}, \qquad \langle\beta| \doteq \begin{pmatrix} f^* & g^* \end{pmatrix}, \tag{4}$$

2. 行列とベクトルの積

(a) 内積（inner product）：単なる複素数となる！この積で括弧（bracket）になる！

$$\langle\beta|\alpha\rangle = \begin{pmatrix} f^* & g^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f^*x + g^*y \tag{5}$$

(i) $\langle\alpha|\beta\rangle^* = \langle\beta|\alpha\rangle$

(ii) $\langle\alpha|\beta\rangle = 0$ のとき，$|\alpha\rangle$ と $|\beta\rangle$ は直交するという．

(iii) $\langle\alpha|\alpha\rangle = 1$ のとき，規格化されているという．

(b) 外積（outer product）：行列（演算子）となる！

$$|\beta\rangle\langle\alpha| = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^* & y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} fx^* & fy^* \\ gx^* & gy^* \end{pmatrix} \tag{6}$$

(c) 行列とベクトルの掛け算

$$A|\alpha\rangle = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} \tag{7}$$

$$\langle\alpha|A = \begin{pmatrix} x^* & y^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax^* + cy^* & bx^* + dy^* \end{pmatrix} \tag{8}$$

(d) 行列と行列の積

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap + br & aq + bs \\ cp + dr & cq + ds \end{pmatrix} \tag{9}$$

(e) 複素共役

$$\langle\beta|A|\alpha\rangle^* = \langle\alpha|A^\dagger|\beta\rangle \tag{10}$$