Chapter 1. Fundamental Concepts

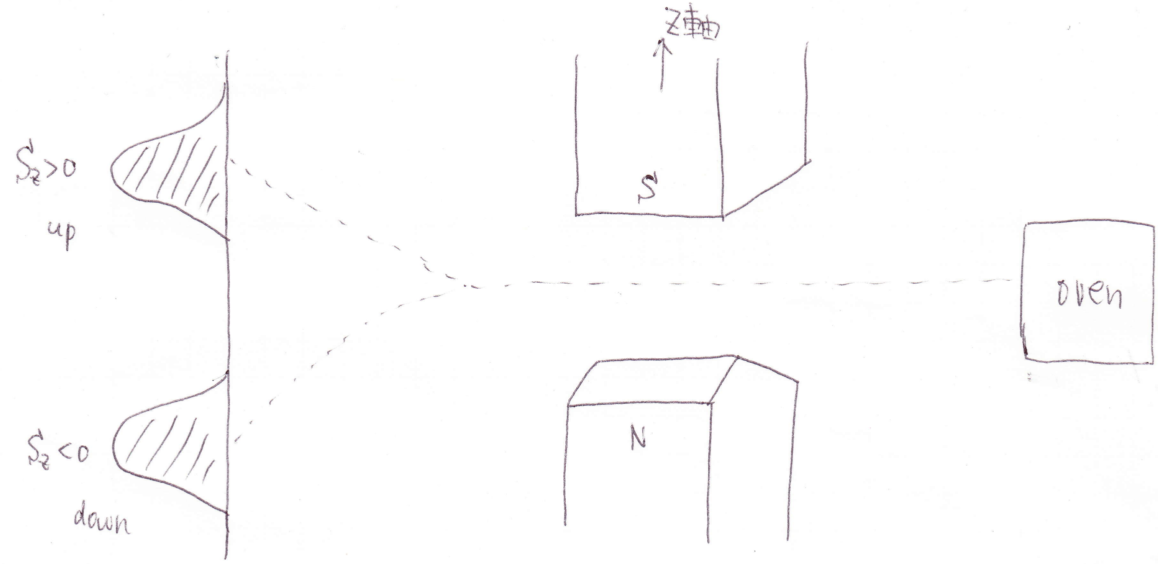
1.1 The Stern-Gerlach experiment (1921, 1922)

silver $_{47}Ag$ $(4s)^2(4p)^6(4d)^{10}(5s)^1$

閉殻　　原子全体として、このスピンがきいてくる。

原子の磁気モーメント $\mu = +\frac{e}{m_e}S$ と書くことができる。

電子のスピン



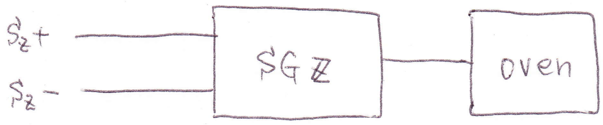
ovenから出てきた銀原子のスピンはランダムなハズだが、
SG-apparatusを通過すると、2つの値のみ観測される。

S_zの大きさは $+\frac{\hbar}{2}$ と $-\frac{\hbar}{2}$ である。

ここで

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = \frac{6.63\times10^{-34}}{2\times3.14} = 1.05\times10^{-34}\ \mathrm{J\cdot s}$$

SG-apparatus を次の様に書こう。



要請1 物理的状態は、ket vector で表わされる。

up …… S_z+ …… $|+\rangle$

down …… S_z- …… $|-\rangle$

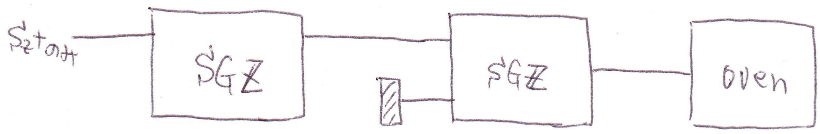
要請2 可観測量(Observable)は、エルミート演算子で表わされる。
operator

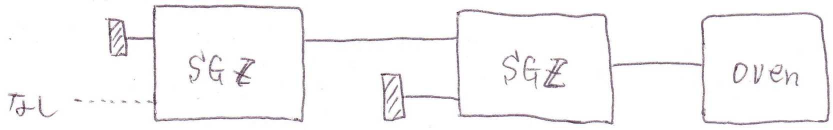
スピンのz成分を調べるという演算子 $\hat{S}_z$

要請3 固有な物理的状態では、観測を行うと固有の値が得られる。

$$\hat{S}_z|+\rangle = \frac{\hbar}{2}|+\rangle$$

$$\hat{S}_z|-\rangle = -\underbrace{\frac{\hbar}{2}}_{\substack{\text{固有値} \\ \text{eigen value}}}\underbrace{|-\rangle}_{\substack{\text{固有ケット} \\ \text{eigen ket}}}$$





要請4 状態$|a\rangle$にある原子が、ある装置を通り抜けて$|b\rangle$という状態になる確率振幅を$\langle b|a\rangle$と書く。確率は$|\langle b|a\rangle|^2$で与えられる。

確率振幅は一般に複素数であり、確率は(もちろん) 0〜1の実数である。

$$\langle +|+\rangle = 1 \quad , \quad \langle -|+\rangle = 0$$

同様に逆をふさげば、

$$\langle +|-\rangle = 0 \quad , \quad \langle -|-\rangle = 1$$

※本来は、確率が1なので

$$|\langle +|+\rangle|^2 = 1$$

である。つまり

$$\langle +|+\rangle = e^{i\delta}$$

でよいが、簡単のため$\langle +|+\rangle = 1$とする。

番号　　　　　　　　　氏名

量子力学 No.1 The Stern-Gerlach Experiment

1. 要請 4 を用いて，要請 3 から演算子 S_z を行列で表そう．

$$S_z \doteq \begin{pmatrix} \langle +|S_z|+\rangle & \langle +|S_z|-\rangle \\ \langle -|S_z|+\rangle & \langle -|S_z|-\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\hbar}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\hbar}{2} \end{pmatrix} \tag{1}$$

2. 要請 3 の固有値・固有ケットの関係を表すために，$|+\rangle$，$|-\rangle$ にどのような行列表示をつくればよいか．

$$|+\rangle \doteq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |-\rangle \doteq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

3. 要請 4 を利用して演算子 S_z を

$$S_z = \frac{\hbar}{2}|+\rangle\langle +| - \frac{\hbar}{2}|-\rangle\langle -| \tag{3}$$

と書くと要請 3 の固有値・固有ケットの関係を満たすことができる．(2) を使って (3) の行列表示を求めなさい．

$$S_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} - \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\hbar}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\hbar}{2} \end{pmatrix}$$

4. (2) の行列表示を使って，$|+\rangle\langle +| + |-\rangle\langle -|$ の行列表示を求めなさい．

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. 二乗して -1 となる数を虚数といい，i と書く．すなわち，$i^2 = -1$ である．2つの実数 x，y から複素数 $z = x + iy$ を作る．この複素共役を $z^* = x - iy$ と定義する．$|z|^2 = z^* z$ を x，y で表しなさい．

$$|z|^2 = z^* z = (x - iy)(x + iy) = x^2 - i^2 y^2 = x^2 + y^2$$

6. 初等関数を x のべき和で表すことをマクローリン展開という．

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \tag{4}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots \tag{5}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \tag{6}$$

(a) これからオイラーの公式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ を証明しなさい．

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

$$= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right)$$

$$= \cos x + i \sin x$$

(b) オイラーの公式とその複素共役 $e^{-ix} = \cos x - i \sin x$ を使って，$\cos x$ と $\sin x$ を e を使って表しなさい．

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x \quad (\pm$$

$$e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos x \longrightarrow \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$e^{ix} - e^{-ix} = 2i \sin x \longrightarrow \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

7. 今日の講義でわかったこと・わからなかったこと・感想などを書きなさい．(自由記載)