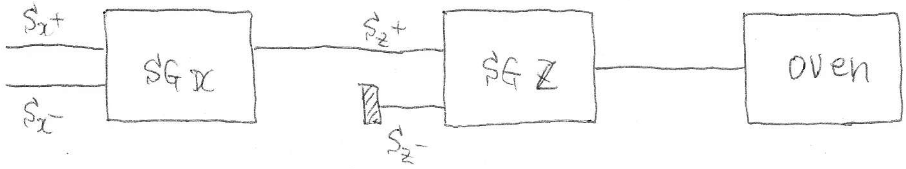
1.2 Sequential Stern-Gerlach experiments

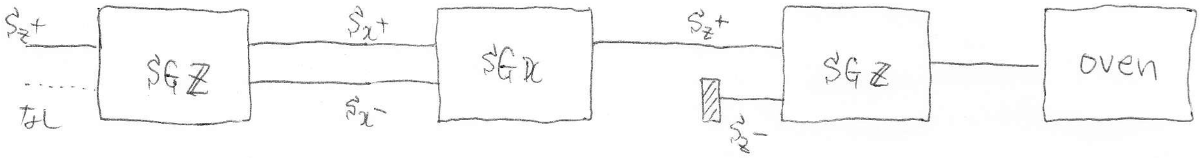


$|+\rangle$ で準備された物理的状態では、S_x+, S_x- の状態となる確率は半々となる。すなわち

$$|\langle x+|+\rangle|^2 + |\langle x-|+\rangle|^2 = 1 \quad \cdots ①$$

$$\| $$

$$\langle x+|+\rangle^* \langle x+|+\rangle + \langle x-|+\rangle^* \langle x-|+\rangle$$



$$\langle +|x+\rangle\langle x+|+\rangle + \langle +|x-\rangle\langle x-|+\rangle = 1 = \langle +|+\rangle \quad \cdots ②$$

$$\langle -|x+\rangle\langle x+|+\rangle + \langle -|x-\rangle\langle x-|+\rangle = 0 = \langle -|+\rangle \quad \cdots ③$$

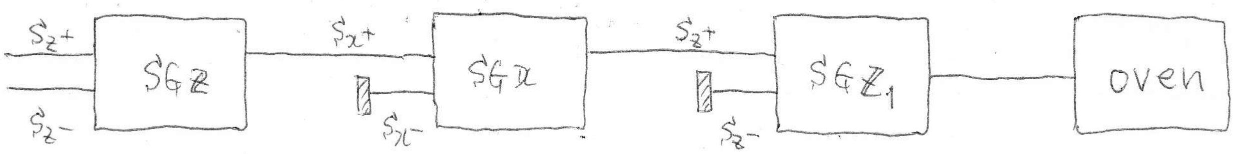
①②式から、

$$\langle x+|+\rangle^* = \langle +|x+\rangle$$

②③式から、

$$|x+\rangle\langle x+| + |x-\rangle\langle x-| = 1 \qquad \text{同様にして} \quad |+\rangle\langle +| + |-\rangle\langle -| = 1$$

↓ ここから量子論特有なこと!



SG z_1 後の S_z+ の状態 $|+\rangle$ を1に規格化したとすると、

$$|\langle +|x+\rangle\langle x+|+\rangle|^2 + |\langle -|x+\rangle\langle x+|+\rangle|^2 = \frac{1}{2}$$

同様に S_x+ を閉じた場合を考えて、

$$|\langle +|x-\rangle\langle x-|+\rangle|^2 + |\langle -|x-\rangle\langle x-|+\rangle|^2 = \frac{1}{2}$$

SGx装置で $|x+\rangle$ に調整されたビームをSGzに通すと $|+\rangle, |-\rangle$ が等しい大きさでてくる。

つまり

$$|\langle +|x+\rangle|^2 + |\langle -|x+\rangle|^2 = 1$$

これより

$$|x+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle$$

同様に $|x-\rangle$ も同じだが，$|x+\rangle$ の状態とは排他的なので，　($\langle +|+\rangle = 1$,　$\langle +|-\rangle = 0$ と同じ関係)

$$|x-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle$$

ととると，

$$\langle x+|x+\rangle = \langle x-|x-\rangle = 1, \qquad \langle x+|x-\rangle = 0$$

を満たすことができる。したがって，

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2}|x+\rangle\langle x+| - \frac{\hbar}{2}|x-\rangle\langle x-|$$

とおけば，

$$\hat{S}_x|x+\rangle = \frac{\hbar}{2}|x+\rangle$$

$$\hat{S}_x|x-\rangle = -\frac{\hbar}{2}|x-\rangle$$

という固有値固有ベクトルの関係ができる。

全く同様にy方向のSGyについても考えられるが，$|x\pm\rangle$ とは違う状態なので，

$$|y+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|-\rangle$$

$$|y-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}|-\rangle$$

ととると，

$$|\langle y+|x+\rangle|^2 = \frac{1}{2}\text{ , etc}$$ も満たすことができる。

上と同様に

$$\hat{S}_y = \frac{\hbar}{2}|y+\rangle\langle y+| - \frac{\hbar}{2}|y-\rangle\langle y-|$$

と書ける。

番号　　　　　　　　氏名

量子力学 No.2 The Sequential Stern-Gerlach Experiments

1. 次の ket vector の行列表示を求めなさい．

$$|x+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle \doteq \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \quad (1)$$

$$|x-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle \doteq \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \quad (2)$$

(a) (1)(2) を使って $\langle x+|x+\rangle = \langle x-|x-\rangle = 1$，$\langle x+|x-\rangle = 0$ となることを確かめなさい．

$$\langle x+|x+\rangle = \frac{1}{2}(1\ \ 1)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1+1) = 1$$

$$\langle x+|x-\rangle = \frac{1}{2}(1,1)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1-1) = 0$$

$$\langle x-|x-\rangle = \frac{1}{2}(1,-1)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1+1) = 1$$

(b) (1)(2) を使って，$|x+\rangle\langle x+| + |x-\rangle\langle x-|$ の行列表示を求めなさい．

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}(1,1) + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}(1,-1) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

(c) (1)(2) を使って，$S_x = \frac{\hbar}{2}|x+\rangle\langle x+| - \frac{\hbar}{2}|x-\rangle\langle x-|$ の行列表示を求めなさい．また，(1)(2) が固有ベクトルとなっていることを確かめなさい．

$$S_x = \frac{\hbar}{4}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}(1,1) - \frac{\hbar}{4}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}(1,-1) = \frac{\hbar}{4}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix} - \frac{\hbar}{4}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix} = \frac{\hbar}{4}\begin{pmatrix}0&2\\2&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&\frac{\hbar}{2}\\\frac{\hbar}{2}&0\end{pmatrix}$$

$$S_x|x+\rangle = \begin{pmatrix}0&\frac{\hbar}{2}\\\frac{\hbar}{2}&0\end{pmatrix} \times \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\frac{\hbar}{2}\\\frac{\hbar}{2}\end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}|x+\rangle$$

$$S_x|x-\rangle = \begin{pmatrix}0&\frac{\hbar}{2}\\\frac{\hbar}{2}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{\hbar}{2\sqrt{2}}\\\frac{\hbar}{2\sqrt{2}}\end{pmatrix} = -\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} = -\frac{\hbar}{2}|x-\rangle$$

2. 次の ket vector の行列表示を求めなさい．

$$|y+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|-\rangle \doteq \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$|y-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}|-\rangle \doteq \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \quad (4)$$

(a) (3)(4) を使って $\langle y+|y+\rangle = \langle y-|y-\rangle = 1$，$\langle y+|y-\rangle = 0$ となることを確かめなさい．

$$\langle y+|y+\rangle = \frac{1}{2}(1, -i)\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1-i^2) = 1$$

$$\langle y+|y-\rangle = \frac{1}{2}(1, -i)\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1+i^2) = 0$$

$$\langle y-|y-\rangle = \frac{1}{2}(1, i)\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1-i^2) = 1$$

(b) (3)(4) を使って，$|y+\rangle\langle y+| + |y-\rangle\langle y-|$ の行列表示を求めなさい．

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}(1, -i) + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}(1, i) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) (3)(4) を使って，$S_y = \frac{\hbar}{2}|y+\rangle\langle y+| - \frac{\hbar}{2}|y-\rangle\langle y-|$ の行列表示を求めなさい．また，(3)(4) が固有ベクトルとなっていることを確かめなさい．

$$S_y = \frac{\hbar}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}(1, -i) - \frac{\hbar}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}(1, i) = \frac{\hbar}{4}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} - \frac{\hbar}{4}\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{4}\begin{pmatrix} 0 & -2i \\ 2i & 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_y|y+\rangle = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{i\hbar}{2} \\ \frac{i\hbar}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{+i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\frac{\hbar}{2\sqrt{2}} \\ \frac{i\hbar}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}|y+\rangle$$

$$S_y|y-\rangle = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{i\hbar}{2} \\ \frac{i\hbar}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\hbar}{2\sqrt{2}} \\ \frac{i\hbar}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix} = -\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = -\frac{\hbar}{2}|y-\rangle$$

3. 今日の講義でわかったこと・わからなかったこと・感想などを書きなさい．(自由記載)