1.4 Measurements and the Uncertainty relations

§1. 期待値

要請4' 任意の状態 $|\alpha\rangle$ であるとき、物理量 A を測定すると得られる値を期待値 (expectation value) といい、

$$\langle A\rangle = \langle\alpha|A|\alpha\rangle$$

で定義する。

いま、A の固有値固有状態がわかっているものとする。

$$A|j\rangle = a_j|j\rangle$$

すると

$$\begin{aligned}
\langle A\rangle &= \sum_{jk}\langle\alpha|j\rangle\langle j|A|k\rangle\langle k|\alpha\rangle \\
&= \sum_{jk}\langle\alpha|j\rangle\, a_k \underbrace{\langle j|k\rangle}_{\delta_{jk}}\langle k|\alpha\rangle \\
&= \sum_{j}\langle\alpha|j\rangle\, a_j \langle j|\alpha\rangle \\
&= \sum_{j} \underbrace{a_j}_{\text{観測値 } a_j}\ \underbrace{|\langle j|\alpha\rangle|^2}_{a_j \text{を得る確率}}
\end{aligned}$$

この期待値は、直感的な測定値の平均値 (average measured value) と同じである。

§2. Uncertainty relation

次の演算子を考える。

$$\delta A = A - \langle A \rangle$$

分散 dispersion

$$\langle (\delta A)^2 \rangle = \langle A^2 - 2\langle A \rangle A + \langle A \rangle^2 \rangle$$

$$= \langle A^2 \rangle - 2\langle A \rangle^2 + \langle A \rangle^2 = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2 \equiv (\Delta A)^2$$

標準偏差 variance, mean square deviation

$$\Delta A = \sqrt{\langle (\delta A)^2 \rangle} = \sqrt{\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2}$$

2つの演算子 A, B があったとき、

$$\Delta A \times \Delta B \geqq \frac{1}{2} \left| \langle [A, B] \rangle \right|$$

が成り立つ。これを不確定性関係という。

スピン $\frac{1}{2}$ について確かめてみよう!

番号　　　　　　　　氏名

量子力学 No. 4　Measurements and the uncertainty relations

1. $S_z|\uparrow\rangle = \frac{\hbar}{2}|\uparrow\rangle$ の状態のとき，次の量を求めなさい．

(a) $\langle S_x\rangle = \langle\uparrow|S_x|\uparrow\rangle$

$$(1\ 0)\begin{pmatrix}0 & \frac{\hbar}{2}\\ \frac{\hbar}{2} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = (1\ 0)\begin{pmatrix}0\\ \frac{\hbar}{2}\end{pmatrix} = 0$$

(b) $\langle {S_x}^2\rangle = \langle\uparrow|{S_x}^2|\uparrow\rangle$

$$S_x^2 = \frac{\hbar^2}{4}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$(1\ 0)\begin{pmatrix}\frac{\hbar^2}{4} & 0\\ 0 & \frac{\hbar^2}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = (1\ 0)\begin{pmatrix}\frac{\hbar^2}{4}\\ 0\end{pmatrix} = \frac{\hbar^2}{4}$$

$$\Delta S_x = \sqrt{\frac{\hbar^2}{4} - 0} = \frac{\hbar}{2}$$

(c) $\langle S_y\rangle = \langle\uparrow|S_y|\uparrow\rangle$

$$(1\ 0)\begin{pmatrix}0 & -\frac{i\hbar}{2}\\ \frac{i\hbar}{2} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = (1\ 0)\begin{pmatrix}0\\ \frac{i\hbar}{2}\end{pmatrix} = 0$$

(d) $\langle {S_y}^2\rangle = \langle\uparrow|{S_y}^2|\uparrow\rangle$

$$(1\ 0)\begin{pmatrix}\frac{\hbar^2}{4} & 0\\ 0 & \frac{\hbar^2}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = (1\ 0)\begin{pmatrix}\frac{\hbar^2}{4}\\ 0\end{pmatrix} = \frac{\hbar^2}{4}$$

$$\Delta S_y = \sqrt{\frac{\hbar^2}{4} - 0} = \frac{\hbar}{2}$$

(e) $\langle S_z\rangle = \langle\uparrow|S_z|\uparrow\rangle$

$$(1\ 0)\begin{pmatrix}\frac{\hbar}{2} & 0\\ 0 & -\frac{\hbar}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = (1\ 0)\begin{pmatrix}\frac{\hbar}{2}\\ 0\end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}$$

(f) $[S_x, S_y] = i\hbar S_z$ より，不確定性関係 $\Delta S_x \cdot \Delta S_y$ を求めなさい．

$$\Delta S_x \cdot \Delta S_y = \frac{\hbar^2}{4}$$

一方、

$$\frac{1}{2}\left|\langle i\hbar S_z\rangle\right| = \frac{1}{2}\left|i\hbar\langle\uparrow|S_z|\uparrow\rangle\right| = \frac{1}{2}\left|i\hbar\frac{\hbar}{2}\right| = \frac{1}{2}\frac{\hbar^2}{2} = \frac{\hbar^2}{4}$$

2. $S_x|x\uparrow\rangle = \frac{\hbar}{2}|x\uparrow\rangle$ の状態のとき,

(a) $\langle S_x\rangle = \langle x\uparrow|S_x|x\uparrow\rangle$

$$\frac{1}{2}(1\ 1)\begin{pmatrix} 0 & \frac{\hbar}{2} \\ \frac{\hbar}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1\ 1)\begin{pmatrix} \frac{\hbar}{2} \\ \frac{\hbar}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{\hbar}{2}+\frac{\hbar}{2}\right) = \frac{\hbar}{2}$$

(b) $\langle {S_x}^2\rangle = \langle x\uparrow|{S_x}^2|x\uparrow\rangle$

$$\frac{1}{2}(1\ 1)\begin{pmatrix} \frac{\hbar^2}{4} & 0 \\ 0 & \frac{\hbar^2}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1\ 1)\begin{pmatrix} \frac{\hbar^2}{4} \\ \frac{\hbar^2}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{\hbar^2}{4}+\frac{\hbar^2}{4}\right) = \frac{\hbar^2}{4}$$

$$\Delta S_x = \sqrt{\frac{\hbar^2}{4}-\frac{\hbar^2}{4}} = 0$$

(c) $\langle S_y\rangle = \langle x\uparrow|S_y|x\uparrow\rangle$

$$\frac{1}{2}(1\ 1)\begin{pmatrix} 0 & -\frac{i\hbar}{2} \\ \frac{i\hbar}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1\ 1)\begin{pmatrix} -\frac{i\hbar}{2} \\ \frac{i\hbar}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left(-\frac{i\hbar}{2}+\frac{i\hbar}{2}\right) = 0$$

(d) $\langle {S_y}^2\rangle = \langle x\uparrow|{S_y}^2|x\uparrow\rangle$

$$\frac{1}{2}(1\ 1)\begin{pmatrix} \frac{\hbar^2}{4} & 0 \\ 0 & \frac{\hbar^2}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1\ 1)\begin{pmatrix} \frac{\hbar^2}{4} \\ \frac{\hbar^2}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{\hbar^2}{4}+\frac{\hbar^2}{4}\right) = \frac{\hbar^2}{4}$$

$$\Delta S_y = \frac{\hbar}{2}$$

(e) $\langle S_z\rangle = \langle x\uparrow|S_z|x\uparrow\rangle$

$$\frac{1}{2}(1\ 1)\begin{pmatrix} \frac{\hbar}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\hbar}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1\ 1)\begin{pmatrix} \frac{\hbar}{2} \\ -\frac{\hbar}{2} \end{pmatrix} = 0$$

(f) $[S_x, S_y] = i\hbar S_z$ より, 不確定性関係 $\Delta S_x \cdot \Delta S_y$ を求めなさい.

$$\Delta S_x \cdot \Delta S_y = 0$$

一方で

$$\frac{1}{2}\left|\langle i\hbar S_z\rangle\right| = \frac{1}{2}\left|i\hbar\langle x\uparrow|S_z|x\uparrow\rangle\right| = 0$$

3. 今日の講義でわかったこと・わからなかったこと・感想などを書きなさい. (自由記載)

① Schwarzの不等式

$|\gamma\rangle = |\alpha\rangle + \lambda|\beta\rangle$ を考える。ここで λ は複素数

まず

$$\langle\gamma|\gamma\rangle = \left(\langle\alpha| + \lambda^*\langle\beta|\right)\cdot\left(|\alpha\rangle + \lambda|\beta\rangle\right)$$

$$= \langle\alpha|\alpha\rangle + \lambda\langle\alpha|\beta\rangle + \lambda^*\langle\beta|\alpha\rangle + |\lambda|^2\langle\beta|\beta\rangle \geqq 0$$

ここで

$$\lambda \equiv \frac{-\langle\beta|\alpha\rangle}{\langle\beta|\beta\rangle}, \quad \lambda^* = \frac{-\langle\alpha|\beta\rangle}{\langle\beta|\beta\rangle}$$ とおくと、

$$\langle\alpha|\alpha\rangle - \frac{\langle\beta|\alpha\rangle}{\langle\beta|\beta\rangle}\langle\alpha|\beta\rangle - \frac{\langle\alpha|\beta\rangle}{\langle\beta|\beta\rangle}\langle\beta|\alpha\rangle + \frac{\langle\beta|\alpha\rangle\langle\alpha|\beta\rangle}{\langle\beta|\beta\rangle^2}\langle\beta|\beta\rangle \geqq 0$$

$$\langle\alpha|\alpha\rangle\langle\beta|\beta\rangle - \langle\beta|\alpha\rangle\langle\alpha|\beta\rangle \geqq 0$$ よって $$\langle\alpha|\alpha\rangle\langle\beta|\beta\rangle \geqq |\langle\alpha|\beta\rangle|^2$$

② エルミート演算子の期待値は real。 $C^\dagger = C$ より $\langle\alpha|C|\alpha\rangle^* = \langle\alpha|C^\dagger|\alpha\rangle = \langle\alpha|C|\alpha\rangle$

③ 反 〃 imaginary。 $C^\dagger = -C$ より $\langle\alpha|C|\alpha\rangle^* = \langle\alpha|C^\dagger|\alpha\rangle = -\langle\alpha|C|\alpha\rangle$

ここで、 $|\alpha\rangle = \delta A|any\rangle$, $|\beta\rangle = \delta B|any\rangle$ とおくと、①より

$$\langle any|(\delta A)^2|any\rangle\langle any|(\delta B)^2|any\rangle \geqq |\langle any|\delta A\cdot\delta B|any\rangle|^2$$

ここで

$$\delta A\cdot\delta B = \frac{1}{2}[\delta A, \delta B] + \frac{1}{2}\{\delta A, \delta B\} = \frac{1}{2}[A, B] + \frac{1}{2}\{\delta A, \delta B\}$$

$$\langle\delta A\cdot\delta B\rangle = \underbrace{\frac{1}{2}\langle[A,B]\rangle}_{\text{purely imaginary}} + \underbrace{\frac{1}{2}\langle\{\delta A,\delta B\}\rangle}_{\text{purely real}}$$

したがって、

$$\langle(\delta A)^2\rangle\langle(\delta B)^2\rangle \geqq \frac{1}{4}|\langle[A,B]\rangle|^2 + \frac{1}{4}|\langle\{\delta A,\delta B\}\rangle|^2 \geqq \frac{1}{4}|\langle[A,B]\rangle|^2$$

よって

$$\underbrace{\sqrt{\langle(\delta A)^2\rangle}\sqrt{\langle(\delta B)^2\rangle}}_{=\,\Delta A\cdot\Delta B} \geqq \frac{1}{2}|\langle[A,B]\rangle|$$