Chapter 2. Spin $\frac{1}{2}$ systems and Finite rotations

2.1 Rotation operator for spin $\frac{1}{2}$ systems

すでに S_x, S_y, S_z の間の関係として ……量子力学No.3参照

$$[S_x, S_y] = i\hbar S_z \quad , \quad \text{etc}$$

は確かめた。これを fundamental commutation relations of angular momentum という。

いま、物理的状態 $|\alpha\rangle$ を、x軸のまわりに角度 φ だけ回転させる演算子を、

$$\mathcal{D}_x(\varphi) = \exp\left[-\frac{i}{\hbar}S_x\varphi\right] = \exp\left[-\frac{i}{2}\sigma_x\varphi\right]$$

と定義する。回転された物理的状態 $|\alpha\rangle_R$ は、

$$|\alpha\rangle_R = \mathcal{D}_x(\varphi)|\alpha\rangle = |\alpha, R\rangle$$

と表わされる。

$$\mathcal{D}_x(\varphi) = e^{-\frac{i}{2}\sigma_x\varphi} = \exp\left[-\frac{i}{2}\sigma_x\varphi\right]$$

量子力学No.1
No.3 参照

$$= 1 - \frac{i}{2}\sigma_x\varphi + \frac{1}{2!}\left(-\frac{i}{2}\sigma_x\varphi\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(-\frac{i}{2}\sigma_x\varphi\right)^3 + \frac{1}{4!}\left(-\frac{i}{2}\sigma_x\varphi\right)^4 + \cdots$$

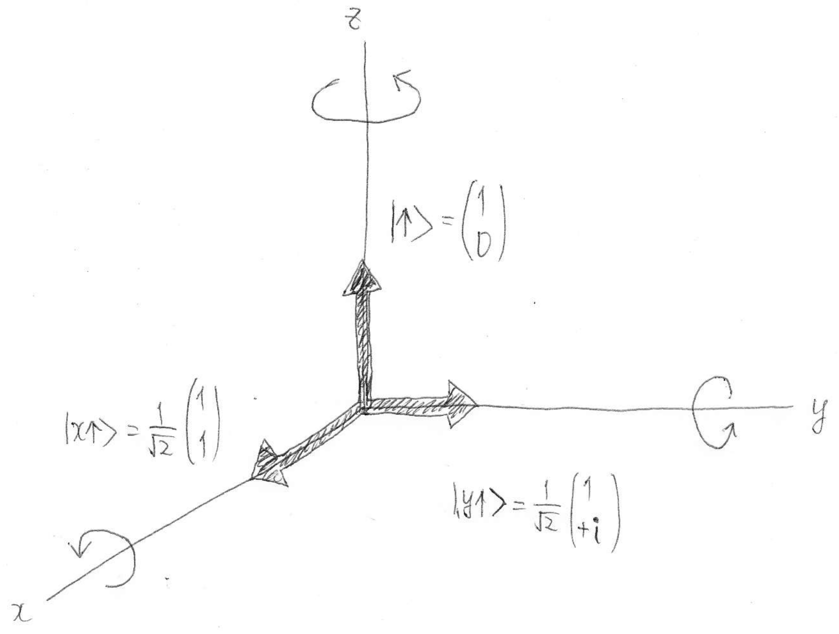
$$= 1 - \frac{i}{2}\sigma_x\varphi - \frac{1}{2!}\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2 + \frac{i}{3!}\sigma_x\left(\frac{\varphi}{2}\right)^3 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\varphi}{2}\right)^4 + \cdots$$

$$= \cos\frac{\varphi}{2} - i\sigma_x \sin\frac{\varphi}{2}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cos\frac{\varphi}{2} - i\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\sin\frac{\varphi}{2}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\frac{\varphi}{2} & -i\sin\frac{\varphi}{2} \\ -i\sin\frac{\varphi}{2} & \cos\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix}$$

この行列で実際に回転が起こるのか？



回転の向きは、"右ネジの法則"とする。

$$\mathcal{D}_x\left(-\frac{\pi}{2}\right)|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & i\sin\frac{\pi}{4} \\ i\sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} \\ i\sin\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ +i \end{pmatrix} = |y\uparrow\rangle$$

確かに $|\uparrow\rangle$ が回転することがわかる。

番号　　　　　　　氏名

量子力学 No. 5　Rotation operator for spin $\frac{1}{2}$ systems

1. 次の量の行列表示を求めなさい.

(a) $\mathcal{D}_y(\varphi) = e^{-\frac{i}{2}\sigma_2\varphi} = \exp[-\frac{i}{2}\sigma_2\varphi]$

$$= 1 - \frac{i}{2}\sigma_2\varphi + \frac{1}{2!}\left(-\frac{i}{2}\sigma_2\varphi\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(-\frac{i}{2}\sigma_2\varphi\right)^3 + \frac{1}{4!}\left(-\frac{i}{2}\sigma_2\varphi\right)^4 + \cdots$$

$$= 1 - \frac{i}{2}\sigma_2\varphi - \frac{1}{2!}\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2 - \frac{i}{3!}\sigma_2\left(\frac{\varphi}{2}\right)^3 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\varphi}{2}\right)^4 + \cdots$$

$$= \cos\frac{\varphi}{2} - i\sigma_2 \sin\frac{\varphi}{2}.$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cos\frac{\varphi}{2} - i\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\sin\frac{\varphi}{2}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\frac{\varphi}{2} & -\sin\frac{\varphi}{2} \\ \sin\frac{\varphi}{2} & \cos\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix}$$

(b) $\mathcal{D}_z(\varphi) = e^{-\frac{i}{2}\sigma_3\varphi} = \exp[-\frac{i}{2}\sigma_3\varphi]$

$$= 1 - \frac{i}{2}\sigma_3\varphi + \frac{1}{2!}\left(-\frac{i}{2}\sigma_3\varphi\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(-\frac{i}{2}\sigma_3\varphi\right)^3 + \frac{1}{4!}\left(-\frac{i}{2}\sigma_3\varphi\right)^4 + \cdots$$

$$= 1 - \frac{i}{2}\sigma_3\varphi - \frac{1}{2!}\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2 - \frac{i}{3!}\sigma_3\left(\frac{\varphi}{2}\right)^3 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\varphi}{2}\right)^4 + \cdots$$

$$= \cos\frac{\varphi}{2} - i\sigma_3 \sin\frac{\varphi}{2}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cos\frac{\varphi}{2} - i\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\sin\frac{\varphi}{2}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\frac{\varphi}{2} - i\sin\frac{\varphi}{2} & 0 \\ 0 & \cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{i\varphi/2} \end{pmatrix}$$

2. 次の量の行列表示を求め，図示しなさい．

(a) $\mathcal{D}_x(-\frac{\pi}{2})|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & i\sin\frac{\pi}{4} \\ i\sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} \\ i\sin\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = |y\uparrow\rangle$

(b) $\mathcal{D}_x(\frac{\pi}{2})|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -i\sin\frac{\pi}{4} \\ -i\sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} \\ -i\sin\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = |y\downarrow\rangle$

(c) $\mathcal{D}_y(\frac{\pi}{2})|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} \\ +\sin\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = |x\uparrow\rangle$

(d) $\mathcal{D}_y(-\frac{\pi}{2})|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & \sin\frac{\pi}{4} \\ -\sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} \\ -\sin\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = |x\downarrow\rangle$

3. 今日の講義でわかったこと・わからなかったこと・感想などを書きなさい．(自由記載)