§2. Rotation in y-axis

同様にしてy軸の周りの回転を考えよう。

回転前の状態として $|\alpha\rangle = |+\rangle$ を考える。

① 確率

$$\langle + | + \rangle_R = \langle + | \mathcal{D}_y(\varphi) | + \rangle = (1, 0) \begin{pmatrix} \cos\frac{\varphi}{2} & -\sin\frac{\varphi}{2} \\ \sin\frac{\varphi}{2} & \cos\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (1, 0) \begin{pmatrix} \cos\frac{\varphi}{2} \\ \sin\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix} = \cos\frac{\varphi}{2}$$

$$|\langle + | \mathcal{D}_y(\varphi) | + \rangle|^2 = \cos^2\frac{\varphi}{2}$$

$$\langle - | + \rangle_R = \langle - | \mathcal{D}_y(\varphi) | + \rangle = (0, 1) \begin{pmatrix} \cos\frac{\varphi}{2} & -\sin\frac{\varphi}{2} \\ \sin\frac{\varphi}{2} & \cos\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (0, 1) \begin{pmatrix} \cos\frac{\varphi}{2} \\ \sin\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix} = \sin\frac{\varphi}{2}$$

$$|\langle - | \mathcal{D}_y(\varphi) | + \rangle|^2 = \sin^2\frac{\varphi}{2}$$

上の2式より $|\langle + | \mathcal{D}_y(\varphi) | + \rangle|^2 + |\langle - | \mathcal{D}_y(\varphi) | + \rangle|^2 = \cos^2\frac{\varphi}{2} + \sin^2\frac{\varphi}{2} = 1$

② 期待値

$$\langle S_x \rangle_R = \langle + | \mathcal{D}_y^{\dagger} S_x \mathcal{D}_y | + \rangle$$

$$= \frac{\hbar}{2}(1, 0) \begin{pmatrix} \cos\frac{\varphi}{2} & +\sin\frac{\varphi}{2} \\ -\sin\frac{\varphi}{2} & \cos\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\frac{\varphi}{2} & -\sin\frac{\varphi}{2} \\ \sin\frac{\varphi}{2} & \cos\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{2}(1, 0) \begin{pmatrix} \cos\frac{\varphi}{2} & \sin\frac{\varphi}{2} \\ -\sin\frac{\varphi}{2} & \cos\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin\frac{\varphi}{2} & \cos\frac{\varphi}{2} \\ \cos\frac{\varphi}{2} & -\sin\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{2}(1, 0) \begin{pmatrix} 2\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2} & \cos^2\frac{\varphi}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2} \\ -\sin^2\frac{\varphi}{2} + \cos^2\frac{\varphi}{2} & -2\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{2}(1, 0) \begin{pmatrix} \sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\varphi & -\sin\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{2}(1, 0) \begin{pmatrix} \sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{2}\sin\varphi$$

$$\langle S_y \rangle_R = \langle + | \underline{\underline{\mathcal{D}_y^\dagger S_y \mathcal{D}_y}} | + \rangle$$

$$= \frac{\hbar}{2}(1,0)\begin{pmatrix} \cos\frac{\varphi}{2} & \sin\frac{\varphi}{2} \\ -\sin\frac{\varphi}{2} & \cos\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\frac{\varphi}{2} & -\sin\frac{\varphi}{2} \\ \sin\frac{\varphi}{2} & \cos\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{2}(1,0)\begin{pmatrix} \cos\frac{\varphi}{2} & \sin\frac{\varphi}{2} \\ -\sin\frac{\varphi}{2} & \cos\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -i\sin\frac{\varphi}{2} & -i\cos\frac{\varphi}{2} \\ i\cos\frac{\varphi}{2} & -i\sin\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{2}(1,0)\begin{pmatrix} 0 & -i\cos^2\frac{\varphi}{2} - i\sin^2\frac{\varphi}{2} \\ i\sin^2\frac{\varphi}{2} + i\cos^2\frac{\varphi}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{2}(1,0)\underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{2}(1,0)\begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} = 0$$

$$\langle S_z \rangle_R = \langle + | \mathcal{D}_y^\dagger S_z \mathcal{D}_y | + \rangle$$

$$= \frac{\hbar}{2}(1,0)\begin{pmatrix} \cos\frac{\varphi}{2} & \sin\frac{\varphi}{2} \\ -\sin\frac{\varphi}{2} & \cos\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\frac{\varphi}{2} & -\sin\frac{\varphi}{2} \\ \sin\frac{\varphi}{2} & \cos\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{2}(1,0)\begin{pmatrix} \cos\frac{\varphi}{2} & \sin\frac{\varphi}{2} \\ -\sin\frac{\varphi}{2} & \cos\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\frac{\varphi}{2} & -\sin\frac{\varphi}{2} \\ -\sin\frac{\varphi}{2} & -\cos\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{2}(1,0)\begin{pmatrix} \cos^2\frac{\varphi}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2} & -2\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2} \\ -2\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2} & \sin^2\frac{\varphi}{2} - \cos^2\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{2}(1,0)\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ -\sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{2}(1,0)\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ -\sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{2}\cos\varphi$$

番号　　　　　　　　氏名

量子力学 No.7 Rotation in y-axis

1. y 軸に関する回転前の状態が

$$|\alpha\rangle = |x\uparrow\rangle \doteq \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \tag{1}$$

であるとき，次の量を求めなさい．

(a) $\langle x\uparrow|\mathcal{D}_y|x\uparrow\rangle$ および $|\langle x\uparrow|\mathcal{D}_y|x\uparrow\rangle|^2$

$$\frac{1}{2}(1,1)\begin{pmatrix}\cos\frac{\varphi}{2} & -\sin\frac{\varphi}{2}\\ \sin\frac{\varphi}{2} & \cos\frac{\varphi}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1,1)\begin{pmatrix}\cos\frac{\varphi}{2}-\sin\frac{\varphi}{2}\\ \sin\frac{\varphi}{2}+\cos\frac{\varphi}{2}\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\varphi}{2}-\sin\frac{\varphi}{2}+\sin\frac{\varphi}{2}+\cos\frac{\varphi}{2}\right) = \cos\frac{\varphi}{2}$$

$$\therefore \left|\langle x\uparrow|\mathcal{D}_y(\varphi)|x\uparrow\rangle\right|^2 = \cos^2\frac{\varphi}{2}$$

(b) $\langle x\downarrow|\mathcal{D}_y|x\uparrow\rangle$ および $|\langle x\downarrow|\mathcal{D}_y|x\uparrow\rangle|^2$

$$\frac{1}{2}(1,-1)\begin{pmatrix}\cos\frac{\varphi}{2} & -\sin\frac{\varphi}{2}\\ \sin\frac{\varphi}{2} & \cos\frac{\varphi}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1,-1)\begin{pmatrix}\cos\frac{\varphi}{2}-\sin\frac{\varphi}{2}\\ \sin\frac{\varphi}{2}+\cos\frac{\varphi}{2}\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\varphi}{2}-\sin\frac{\varphi}{2}-\sin\frac{\varphi}{2}-\cos\frac{\varphi}{2}\right) = -\sin\frac{\varphi}{2}$$

$$\therefore \left|\langle x\downarrow|\mathcal{D}_y(\varphi)|x\uparrow\rangle\right|^2 = \sin^2\frac{\varphi}{2}$$

(c) $|\langle x\uparrow|\mathcal{D}_y|x\uparrow\rangle|^2 + |\langle x\downarrow|\mathcal{D}_y|x\uparrow\rangle|^2$ $= \cos^2\frac{\varphi}{2}+\sin^2\frac{\varphi}{2} = 1$

2. 表面のとき，次の期待値を求めなさい．

(a) $\langle S_x \rangle \to \langle S_x \rangle_R = \langle x\uparrow | \mathcal{D}_y^\dagger S_x \mathcal{D}_y | x\uparrow \rangle$

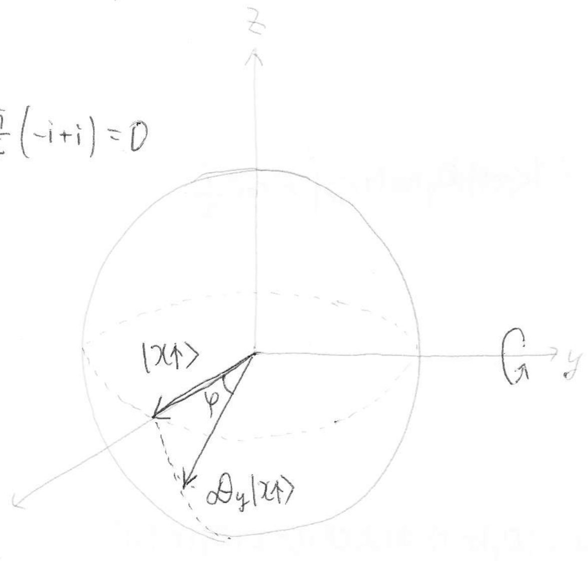
$$\frac{1}{2}\frac{\hbar}{2}(1,1)\begin{pmatrix} \sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\varphi & -\sin\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{4}(1,1)\begin{pmatrix} \sin\varphi + \cos\varphi \\ \cos\varphi - \sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{4}\left(\sin\varphi + \cos\varphi + \cos\varphi - \sin\varphi\right)$$

$$= \frac{\hbar}{2}\cos\varphi$$

(b) $\langle S_y \rangle \to \langle S_y \rangle_R = \langle x\uparrow | \mathcal{D}_y^\dagger S_y \mathcal{D}_y | x\uparrow \rangle$

$$\frac{1}{2}\frac{\hbar}{2}(1,1)\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{4}(1,1)\begin{pmatrix} -i \\ i \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{4}(-i+i) = 0$$



(c) $\langle S_z \rangle \to \langle S_z \rangle_R = \langle x\uparrow | \mathcal{D}_y^\dagger S_z \mathcal{D}_y | x\uparrow \rangle$

$$\frac{1}{2}\frac{\hbar}{2}(1,1)\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ -\sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{4}(1,1)\begin{pmatrix} \cos\varphi - \sin\varphi \\ -\sin\varphi - \cos\varphi \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{4}\left(\cos\varphi - \sin\varphi - \sin\varphi - \cos\varphi\right)$$

$$= -\frac{\hbar}{2}\sin\varphi$$

3. 今日の講義でわかったこと・わからなかったこと・感想などを書きなさい．(自由記載)

番号　　　　　　　　氏名

量子力学 No.7-2 Rotation in y-axis

1. y 軸に関する回転前の状態が

$$|\alpha\rangle = |y\uparrow\rangle \doteq \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix} \tag{2}$$

であるとき，次の量を求めなさい．

(a) $\langle y\uparrow|\mathcal{D}_y|y\uparrow\rangle$ および $|\langle y\uparrow|\mathcal{D}_y|y\uparrow\rangle|^2$

$$\frac{1}{2}(1,-i)\begin{pmatrix}\cos\frac{\varphi}{2} & -\sin\frac{\varphi}{2}\\ \sin\frac{\varphi}{2} & \cos\frac{\varphi}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1,-i)\begin{pmatrix}\cos\frac{\varphi}{2} - i\sin\frac{\varphi}{2}\\ \sin\frac{\varphi}{2} + i\cos\frac{\varphi}{2}\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\varphi}{2} - i\sin\frac{\varphi}{2} - i\sin\frac{\varphi}{2} + \cos\frac{\varphi}{2}\right) = e^{-i\varphi/2}$$

$$|\langle y\uparrow|\mathcal{D}_y|y\uparrow\rangle|^2 = |e^{-i\varphi/2}|^2 = 1$$

(b) $\langle y\downarrow|\mathcal{D}_y|y\uparrow\rangle$ および $|\langle y\downarrow|\mathcal{D}_y|y\uparrow\rangle|^2$

$$\frac{1}{2}(1,i)\begin{pmatrix}\cos\frac{\varphi}{2} & -\sin\frac{\varphi}{2}\\ \sin\frac{\varphi}{2} & \cos\frac{\varphi}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1,i)\begin{pmatrix}\cos\frac{\varphi}{2} - i\sin\frac{\varphi}{2}\\ \sin\frac{\varphi}{2} + i\cos\frac{\varphi}{2}\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\varphi}{2} - i\sin\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2} - \cos\frac{\varphi}{2}\right) = 0$$

$$|\langle y\ |\mathcal{D}_y|y\uparrow\rangle|^2 = 0$$

(c) $|\langle y\uparrow|\mathcal{D}_y|y\uparrow\rangle|^2 + |\langle y\downarrow|\mathcal{D}_y|y\uparrow\rangle|^2$ $= 1 + 0 = 0$

2. 表面のとき，次の期待値を求めなさい．

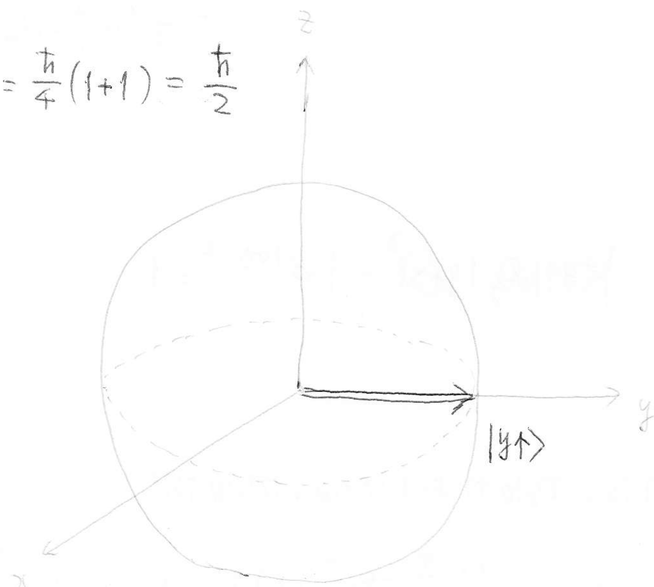
(a) $\langle S_x\rangle \to \langle S_x\rangle_R = \langle y\uparrow|\mathcal{D}_y^\dagger S_x \mathcal{D}_y|y\uparrow\rangle$

$$\frac{1}{2}\frac{\hbar}{2}(1,-i)\begin{pmatrix}\sin\varphi & \cos\varphi\\ \cos\varphi & -\sin\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix} = \frac{\hbar}{4}(1,-i)\begin{pmatrix}\sin\varphi+i\cos\varphi\\ \cos\varphi-i\sin\varphi\end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{4}\left(\sin\varphi+i\cos\varphi-i\cos\varphi-\sin\varphi\right) = 0$$

(b) $\langle S_y\rangle \to \langle S_y\rangle_R = \langle y\uparrow|\mathcal{D}_y^\dagger S_y \mathcal{D}_y|y\uparrow\rangle$

$$\frac{1}{2}\frac{\hbar}{2}(1,-i)\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix} = \frac{\hbar}{4}(1,-i)\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix} = \frac{\hbar}{4}(1+1) = \frac{\hbar}{2}$$



(c) $\langle S_z\rangle \to \langle S_z\rangle_R = \langle y\uparrow|\mathcal{D}_y^\dagger S_z \mathcal{D}_y|y\uparrow\rangle$

$$\frac{1}{2}\frac{\hbar}{2}(1,-i)\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ -\sin\varphi & -\cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix} = \frac{\hbar}{4}(1,-i)\begin{pmatrix}\cos\varphi-i\sin\varphi\\ -\sin\varphi-i\cos\varphi\end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{4}\left(\cos\varphi-i\sin\varphi+i\sin\varphi-\cos\varphi\right)$$

$$= 0$$

ちなみに

$$\mathcal{D}_y^+ S_x \mathcal{D}_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\varphi & -\sin\varphi \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\sin\varphi + \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cos\varphi = S_z \sin\varphi + S_x \cos\varphi$$

$$\mathcal{D}_y^+ S_y \mathcal{D}_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = S_y$$

$$\mathcal{D}_y^+ S_z \mathcal{D}_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ -\sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\cos\varphi - \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\sin\varphi = S_z \cos\varphi - S_x \sin\varphi$$