§3. Rotation in x-axis

同様にしてx軸のまわりの回転を考えよう。

回転前の状態として $|\alpha\rangle = |+\rangle$ を考える。

① 確率

$$\langle +|+\rangle_R = \langle +|\mathcal{D}_x(\varphi)|+\rangle = (1, 0)\begin{pmatrix} \cos\frac{\varphi}{2} & -i\sin\frac{\varphi}{2} \\ -i\sin\frac{\varphi}{2} & \cos\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (1, 0)\begin{pmatrix} \cos\frac{\varphi}{2} \\ -i\sin\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix} = \cos\frac{\varphi}{2}$$

$$\left|\langle +|\mathcal{D}_x(\varphi)|+\rangle\right|^2 = \cos^2\frac{\varphi}{2}$$

$$\langle -|+\rangle_R = \langle -|\mathcal{D}_x(\varphi)|+\rangle = (0, 1)\begin{pmatrix} \cos\frac{\varphi}{2} & -i\sin\frac{\varphi}{2} \\ -i\sin\frac{\varphi}{2} & \cos\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (0, 1)\begin{pmatrix} \cos\frac{\varphi}{2} \\ -i\sin\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix} = -i\sin\frac{\varphi}{2}$$

$$\left|\langle -|\mathcal{D}_x(\varphi)|+\rangle\right|^2 = \left|-i\sin\frac{\varphi}{2}\right|^2 = \sin^2\frac{\varphi}{2}$$

② 期待値

$$\langle S_x\rangle_R = \langle +|\mathcal{D}_x^+ S_x \mathcal{D}_x|+\rangle$$

$$= \frac{\hbar}{2}(1, 0)\begin{pmatrix} \cos\frac{\varphi}{2} & i\sin\frac{\varphi}{2} \\ +i\sin\frac{\varphi}{2} & \cos\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\frac{\varphi}{2} & -i\sin\frac{\varphi}{2} \\ -i\sin\frac{\varphi}{2} & \cos\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{2}(1, 0)\begin{pmatrix} \cos\frac{\varphi}{2} & i\sin\frac{\varphi}{2} \\ i\sin\frac{\varphi}{2} & \cos\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -i\sin\frac{\varphi}{2} & \cos\frac{\varphi}{2} \\ \cos\frac{\varphi}{2} & -i\sin\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{2}(1, 0)\begin{pmatrix} 0 & \cos^2\frac{\varphi}{2} + \sin^2\frac{\varphi}{2} \\ \sin^2\frac{\varphi}{2} + \cos^2\frac{\varphi}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{2}(1, 0)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{2}(1, 0)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= 0$$

$$\langle S_y \rangle_R = \underline{\underline{\langle + | \mathcal{D}_x^{+} S_y \mathcal{D}_x | + \rangle}}$$

$$= \frac{\hbar}{2}(1,0)\begin{pmatrix} \cos\frac{\varphi}{2} & i\sin\frac{\varphi}{2} \\ i\sin\frac{\varphi}{2} & \cos\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\frac{\varphi}{2} & -i\sin\frac{\varphi}{2} \\ -i\sin\frac{\varphi}{2} & \cos\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{2}(1,0)\begin{pmatrix} \cos\frac{\varphi}{2} & i\sin\frac{\varphi}{2} \\ i\sin\frac{\varphi}{2} & \cos\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\sin\frac{\varphi}{2} & -i\cos\frac{\varphi}{2} \\ i\cos\frac{\varphi}{2} & \sin\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{2}(1,0)\begin{pmatrix} -2\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2} & -i\cos^2\frac{\varphi}{2} + i\sin^2\frac{\varphi}{2} \\ -i\sin^2\frac{\varphi}{2} + i\cos^2\frac{\varphi}{2} & 2\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{2}(1,0)\underline{\underline{\begin{pmatrix} -\sin\varphi & -i\cos\varphi \\ i\cos\varphi & \sin\varphi \end{pmatrix}}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{2}(1,0)\begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ i\cos\varphi \end{pmatrix} = -\frac{\hbar}{2}\sin\varphi$$

$$\langle S_z \rangle_R = \langle + | \underbrace{\mathcal{D}_x^{+} S_z}\mathcal{D}_x | + \rangle$$

$$= \frac{\hbar}{2}(1,0)\begin{pmatrix} \cos\frac{\varphi}{2} & i\sin\frac{\varphi}{2} \\ i\sin\frac{\varphi}{2} & \cos\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\frac{\varphi}{2} & -i\sin\frac{\varphi}{2} \\ -i\sin\frac{\varphi}{2} & \cos\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

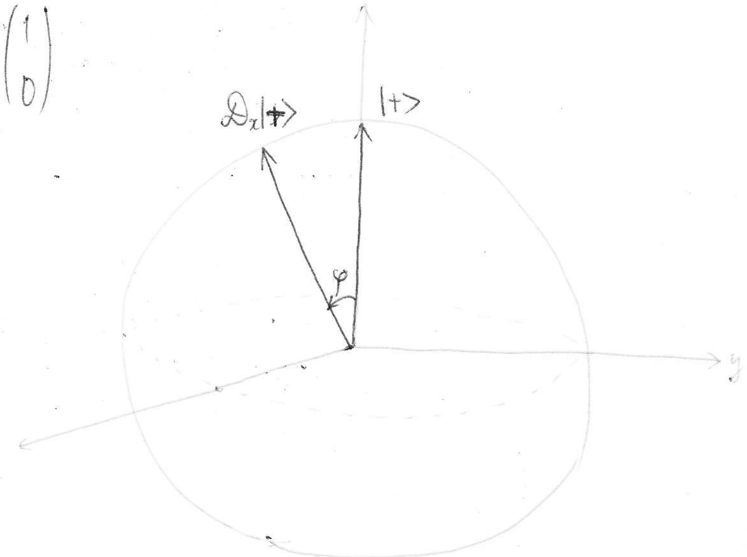
$$= \frac{\hbar}{2}(1,0)\begin{pmatrix} \cos\frac{\varphi}{2} & i\sin\frac{\varphi}{2} \\ i\sin\frac{\varphi}{2} & \cos\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\frac{\varphi}{2} & -i\sin\frac{\varphi}{2} \\ i\sin\frac{\varphi}{2} & -\cos\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{2}(1,0)\begin{pmatrix} \cos^2\frac{\varphi}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2} & -2i\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2} \\ 2i\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2} & \sin^2\frac{\varphi}{2} - \cos^2\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{2}(1,0)\underbrace{\begin{pmatrix} \cos\varphi & -i\sin\varphi \\ i\sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{2}(1,0)\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ i\sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{2}\cos\varphi$$



番号　　　　　　　　氏名

量子力学 No.8 Rotation in x-axis

1. x 軸に関する回転前の状態が

$$|\alpha\rangle = |x\uparrow\rangle \doteq \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \tag{1}$$

であるとき，次の量を求めなさい．

(a) $\langle x\uparrow|\mathcal{D}_x|x\uparrow\rangle =$ $\frac{1}{2}(1,1)\begin{pmatrix}\cos\frac{\varphi}{2} & -i\sin\frac{\varphi}{2}\\ -i\sin\frac{\varphi}{2} & \cos\frac{\varphi}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$= \frac{1}{2}(1,1)\begin{pmatrix}\cos\frac{\varphi}{2}-i\sin\frac{\varphi}{2}\\ -i\sin\frac{\varphi}{2}+\cos\frac{\varphi}{2}\end{pmatrix} = \cos\frac{\varphi}{2}-i\sin\frac{\varphi}{2} = e^{-i\varphi/2}$

(b) $|\langle x\uparrow|\mathcal{D}_x|x\uparrow\rangle|^2 =$ $\left|e^{-i\varphi/2}\right|^2 = 1$

(c) $\langle x\downarrow|\mathcal{D}_x|x\uparrow\rangle =$ $\frac{1}{2}(1,-1)\begin{pmatrix}\cos\frac{\varphi}{2} & -i\sin\frac{\varphi}{2}\\ -i\sin\frac{\varphi}{2} & \cos\frac{\varphi}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$= \frac{1}{2}(1,-1)\begin{pmatrix}\cos\frac{\varphi}{2}-i\sin\frac{\varphi}{2}\\ -i\sin\frac{\varphi}{2}+\cos\frac{\varphi}{2}\end{pmatrix} = 0$

(d) $|\langle x\downarrow|\mathcal{D}_x|x\uparrow\rangle|^2 =$ 0.

(e) $|\langle x\uparrow|\mathcal{D}_x|x\uparrow\rangle|^2 + |\langle x\downarrow|\mathcal{D}_x|x\uparrow\rangle|^2 =$ $1+0=1$

2. 表面のとき，次の期待値を求めなさい．

(a) $\langle S_x \rangle \to \langle S_x \rangle_R = \langle x\uparrow | \mathcal{D}_x^\dagger S_x \mathcal{D}_x | x\uparrow \rangle$

$$= \frac{1}{2}\frac{\hbar}{2}(1,1)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{4}(1,1)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{2}$$

(b) $\langle S_y \rangle \to \langle S_y \rangle_R = \langle x\uparrow | \mathcal{D}_x^\dagger S_y \mathcal{D}_x | x\uparrow \rangle$

$$= \frac{1}{2}\frac{\hbar}{2}(1,1)\begin{pmatrix} -\sin\varphi & -i\cos\varphi \\ i\cos\varphi & \sin\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{4}(1,1)\begin{pmatrix} -\sin\varphi - i\cos\varphi \\ i\cos\varphi + \sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{4}\left(-\sin\varphi - i\cos\varphi + i\cos\varphi + \sin\varphi\right) = 0$$

(c) $\langle S_z \rangle \to \langle S_z \rangle_R = \langle x\uparrow | \mathcal{D}_x^\dagger S_z \mathcal{D}_x | x\uparrow \rangle$

$$= \frac{1}{2}\frac{\hbar}{2}(1,1)\begin{pmatrix} \cos\varphi & -i\sin\varphi \\ i\sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{4}(1,1)\begin{pmatrix} \cos\varphi - i\sin\varphi \\ i\sin\varphi - \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{4}\left(\cos\varphi - i\sin\varphi + i\sin\varphi - \cos\varphi\right) = 0$$

3. 今日の講義でわかったこと・わからなかったこと・感想などを書きなさい．(自由記載)

番号　　　　　　　　　　　氏名

量子力学 No.8-2 Rotation in x-axis

1. x 軸に関する回転前の状態が

$$|\alpha\rangle = |y\uparrow\rangle \doteq \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix} \tag{2}$$

であるとき，次の量を求めなさい．

(a) $\langle y\uparrow|\mathcal{D}_x|y\uparrow\rangle = \frac{1}{2}(1,-i)\begin{pmatrix}\cos\frac{\varphi}{2} & -i\sin\frac{\varphi}{2}\\ -i\sin\frac{\varphi}{2} & \cos\frac{\varphi}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}$

$= \frac{1}{2}(1,-i)\begin{pmatrix}\cos\frac{\varphi}{2}+\sin\frac{\varphi}{2}\\ -i\sin\frac{\varphi}{2}+i\cos\frac{\varphi}{2}\end{pmatrix}$

$= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\varphi}{2}+\sin\frac{\varphi}{2}-\sin\frac{\varphi}{2}+\cos\frac{\varphi}{2}\right) = \cos\frac{\varphi}{2}$

(b) $|\langle y\uparrow|\mathcal{D}_x|y\uparrow\rangle|^2 = \cos^2\frac{\varphi}{2}$

(c) $\langle y\downarrow|\mathcal{D}_x|y\uparrow\rangle = \frac{1}{2}(1,i)\begin{pmatrix}\cos\frac{\varphi}{2} & -i\sin\frac{\varphi}{2}\\ -i\sin\frac{\varphi}{2} & \cos\frac{\varphi}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}$

$= \frac{1}{2}(1,i)\begin{pmatrix}\cos\frac{\varphi}{2}+\sin\frac{\varphi}{2}\\ -i\sin\frac{\varphi}{2}+i\cos\frac{\varphi}{2}\end{pmatrix}$

$= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\varphi}{2}+\sin\frac{\varphi}{2}+\sin\frac{\varphi}{2}-\cos\frac{\varphi}{2}\right) = \sin\frac{\varphi}{2}$

(d) $|\langle y\downarrow|\mathcal{D}_x|y\uparrow\rangle|^2 = \sin^2\frac{\varphi}{2}$

(e) $|\langle y\uparrow|\mathcal{D}_x|y\uparrow\rangle|^2 + |\langle y\downarrow|\mathcal{D}_x|y\uparrow\rangle|^2 = \cos^2\frac{\varphi}{2}+\sin^2\frac{\varphi}{2} = 1$

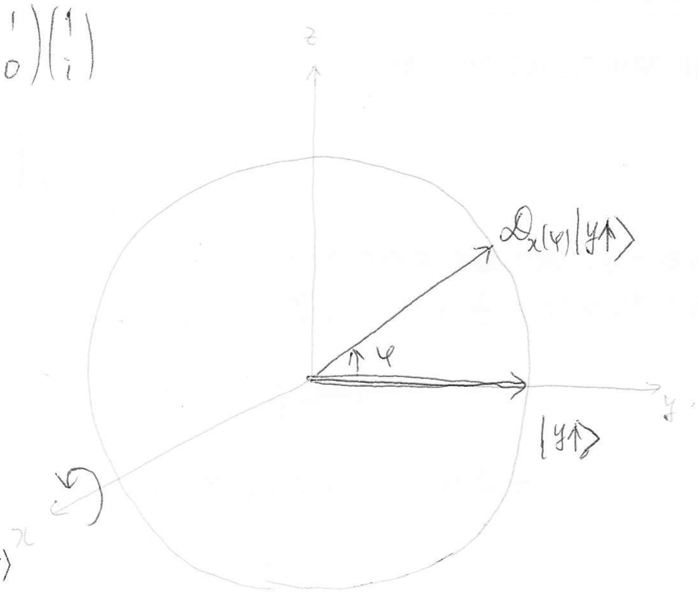
2. 表面のとき，次の期待値を求めなさい．

(a) $\langle S_x\rangle \to \langle S_x\rangle_R = \langle y\uparrow|\mathcal{D}_x^\dagger S_x \mathcal{D}_x|y\uparrow\rangle$

$$= \frac{1}{2}\frac{\hbar}{2}(1,-i)\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{4}(1,-i)\begin{pmatrix}i\\ 1\end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{4}(i-i) = 0$$



(b) $\langle S_y\rangle \to \langle S_y\rangle_R = \langle y\uparrow|\mathcal{D}_x^\dagger S_y \mathcal{D}_x|y\uparrow\rangle$

$$= \frac{1}{2}\frac{\hbar}{2}(1,-i)\begin{pmatrix}-\sin\varphi & -i\cos\varphi\\ i\cos\varphi & \sin\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{4}(1,-i)\begin{pmatrix}-\sin\varphi + \cos\varphi\\ i\cos\varphi + i\sin\varphi\end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{4}(-\sin\varphi + \cos\varphi + \cos\varphi + \sin\varphi) = \frac{\hbar}{2}\cos\varphi$$

(c) $\langle S_z\rangle \to \langle S_z\rangle_R = \langle y\uparrow|\mathcal{D}_x^\dagger S_z \mathcal{D}_x|y\uparrow\rangle$

$$= \frac{1}{2}\frac{\hbar}{2}(1,-i)\begin{pmatrix}\cos\varphi & -i\sin\varphi\\ i\sin\varphi & -\cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{4}(1,-i)\begin{pmatrix}\cos\varphi + \sin\varphi\\ i\sin\varphi - i\cos\varphi\end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{4}(\cos\varphi + \sin\varphi + \sin\varphi - \cos\varphi)$$

$$= \frac{\hbar}{2}\sin\varphi$$

ちなみに.

$$\mathcal{D}_x^{\dagger}\hat{S}_x\mathcal{D}_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \hat{S}_x$$

$$\mathcal{D}_x^{\dagger}\hat{S}_y\mathcal{D}_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} -\sin\varphi & -i\cos\varphi \\ i\cos\varphi & \sin\varphi \end{pmatrix} = -\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\sin\varphi + \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\cos\varphi = -\hat{S}_z\sin\varphi + \hat{S}_y\cos\varphi$$

$$\mathcal{D}_x^{\dagger}\hat{S}_z\mathcal{D}_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \cos\varphi & -i\sin\varphi \\ i\sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\cos\varphi + \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\sin\varphi = \hat{S}_z\cos\varphi + \hat{S}_y\sin\varphi$$