2.3 Euler rotations

すべての回転はオイラー回転を使って表わされる。これは、3つのステップによって表わされ、3つの角度によって指定される。

$$\mathcal{D}^E = \mathcal{D}_z(\alpha)\mathcal{D}_y(\beta)\mathcal{D}_z(\gamma)$$

今から、S_z の固有値 $+\frac{\hbar}{2}$ に属する固有ベクトル $|+\rangle$ を回転させて、任意の状態を作ってみよう。$|+\rangle$ は z軸正方向を向いているので、これをz軸のまわりに回転させても何も変わらない。したがって、$\gamma = 0$ とする。残りの回転は、

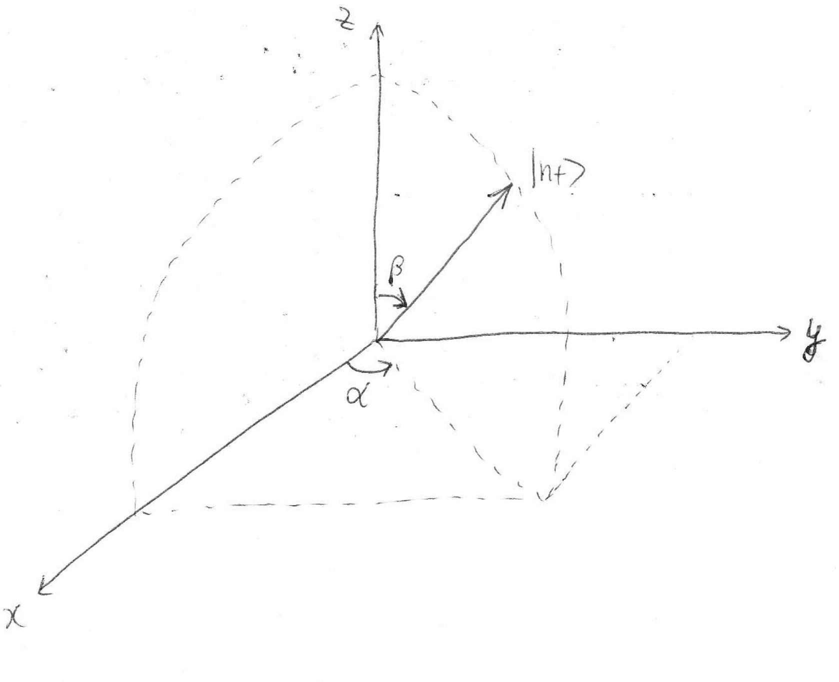
$$\mathcal{D}_z(\alpha)\mathcal{D}_y(\beta) = \exp\left[-\frac{i}{2}\sigma_z\alpha\right]\exp\left[-\frac{i}{2}\sigma_y\beta\right]$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-i\alpha/2} & 0 \\ 0 & e^{i\alpha/2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\frac{\beta}{2} & -\sin\frac{\beta}{2} \\ \sin\frac{\beta}{2} & \sin\frac{\beta}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-i\alpha/2}\cos\frac{\beta}{2} & -e^{-i\alpha/2}\sin\frac{\beta}{2} \\ e^{i\alpha/2}\sin\frac{\beta}{2} & e^{i\alpha/2}\sin\frac{\beta}{2} \end{pmatrix}$$

と表わされる。回転された状態を $|n+\rangle$ と書くと、

$$|n+\rangle = \mathcal{D}_z(\alpha)\mathcal{D}_y(\beta)|+\rangle = \begin{pmatrix} e^{-i\alpha/2}\cos\frac{\beta}{2} & -e^{-i\alpha/2}\sin\frac{\beta}{2} \\ e^{i\alpha/2}\sin\frac{\beta}{2} & e^{i\alpha/2}\sin\frac{\beta}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\alpha/2}\cos\frac{\beta}{2} \\ e^{i\alpha/2}\sin\frac{\beta}{2} \end{pmatrix}$$



① 確率

$$\langle +|n+\rangle = (1,0)\begin{pmatrix} e^{-i\alpha/2}\cos\frac{\beta}{2} \\ e^{i\alpha/2}\sin\frac{\beta}{2} \end{pmatrix} = e^{-i\alpha/2}\cos\frac{\beta}{2} \quad \text{よって} \quad |\langle +|n+\rangle|^2 = \cos^2\frac{\beta}{2}$$

$$\langle -|n+\rangle = (0,1)\begin{pmatrix} e^{-i\alpha/2}\cos\frac{\beta}{2} \\ e^{i\alpha/2}\sin\frac{\beta}{2} \end{pmatrix} = e^{i\alpha/2}\sin\frac{\beta}{2} \quad \text{よって} \quad |\langle -|n+\rangle|^2 = \sin^2\frac{\beta}{2}$$

② 期待値

$$\langle S_x\rangle = \langle n+|S_x|n+\rangle$$

$$= \frac{\hbar}{2}\left(e^{i\alpha/2}\cos\frac{\beta}{2},\ e^{-i\alpha/2}\sin\frac{\beta}{2}\right)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-i\alpha/2}\cos\frac{\beta}{2} \\ e^{i\alpha/2}\sin\frac{\beta}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{2}\left(e^{i\alpha/2}\cos\frac{\beta}{2},\ e^{-i\alpha/2}\sin\frac{\beta}{2}\right)\begin{pmatrix} e^{i\alpha/2}\sin\frac{\beta}{2} \\ e^{-i\alpha/2}\cos\frac{\beta}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{2}\left(e^{i\alpha}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\beta}{2} + e^{-i\alpha}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right) = \frac{\hbar}{2}\cos\alpha\sin\beta$$

$$\langle S_y\rangle = \langle n+|S_y|n+\rangle$$

$$= \frac{\hbar}{2}\left(e^{i\alpha/2}\cos\frac{\beta}{2},\ e^{-i\alpha/2}\sin\frac{\beta}{2}\right)\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-i\alpha/2}\cos\frac{\beta}{2} \\ e^{i\alpha/2}\sin\frac{\beta}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{2}\left(e^{i\alpha/2}\cos\frac{\beta}{2},\ e^{-i\alpha/2}\sin\frac{\beta}{2}\right)\begin{pmatrix} -i\,e^{i\alpha/2}\sin\frac{\beta}{2} \\ i\,e^{-i\alpha/2}\cos\frac{\beta}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{2}\left(-i\,e^{i\alpha}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\beta}{2} + i\,e^{-i\alpha}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}\right)$$

$$= \hbar\,\frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\beta}{2} = \frac{\hbar}{2}\sin\alpha\sin\beta$$

$$\langle S_z\rangle = \langle n+|S_z|n+\rangle$$

$$= \frac{\hbar}{2}\left(e^{i\alpha/2}\cos\frac{\beta}{2},\ e^{-i\alpha/2}\sin\frac{\beta}{2}\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-i\alpha/2}\cos\frac{\beta}{2} \\ e^{i\alpha/2}\sin\frac{\beta}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{2}\left(e^{i\alpha/2}\cos\frac{\beta}{2},\ e^{-i\alpha/2}\sin\frac{\beta}{2}\right)\begin{pmatrix} e^{-i\alpha/2}\cos\frac{\beta}{2} \\ -e^{i\alpha/2}\sin\frac{\beta}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{2}\left(\cos^2\frac{\beta}{2} - \sin^2\frac{\beta}{2}\right) = \frac{\hbar}{2}\cos\beta$$

番号　　　　　　　　氏名

量子力学 No.9 Euler rotation

1. 状態 $|n\uparrow\rangle$ が

$$|\alpha\rangle = |n\uparrow\rangle \doteq \begin{pmatrix} e^{-i\alpha/2}\cos\frac{\beta}{2} \\ e^{i\alpha/2}\sin\frac{\beta}{2} \end{pmatrix} \tag{1}$$

であるとき，次の確率を求めなさい．

(a) $|\langle x\uparrow|n\uparrow\rangle|^2$

$$\langle x\uparrow|n\uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)\begin{pmatrix} e^{-i\alpha/2}\cos\frac{\beta}{2} \\ e^{i\alpha/2}\sin\frac{\beta}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-i\alpha/2}\cos\frac{\beta}{2} + e^{i\alpha/2}\sin\frac{\beta}{2}\right)$$

$$|\langle x\uparrow|n\uparrow\rangle|^2 = \frac{1}{2}\left(e^{i\alpha/2}\cos\frac{\beta}{2} + e^{-i\alpha/2}\sin\frac{\beta}{2}\right)\left(e^{-i\alpha/2}\cos\frac{\beta}{2} + e^{i\alpha/2}\sin\frac{\beta}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos^2\frac{\beta}{2} + e^{i\alpha}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\beta}{2} + e^{-i\alpha}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\beta}{2} + \sin^2\frac{\beta}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2}\times 2\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1+\cos\alpha\sin\beta\right) = \frac{1+\cos\alpha\sin\beta}{2}$$

(b) $|\langle y\uparrow|n\uparrow\rangle|^2$

$$\langle y\uparrow|n\uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-i)\begin{pmatrix} e^{-i\alpha/2}\cos\frac{\beta}{2} \\ e^{i\alpha/2}\sin\frac{\beta}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-i\alpha/2}\cos\frac{\beta}{2} - i e^{i\alpha/2}\sin\frac{\beta}{2}\right)$$

$$|\langle y\uparrow|n\uparrow\rangle|^2 = \frac{1}{2}\left(e^{i\alpha/2}\cos\frac{\beta}{2} + i e^{-i\alpha/2}\sin\frac{\beta}{2}\right)\left(e^{-i\alpha/2}\cos\frac{\beta}{2} - i e^{i\alpha/2}\sin\frac{\beta}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos^2\frac{\beta}{2} - i e^{i\alpha}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\beta}{2} + i e^{-i\alpha}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\beta}{2} + \sin^2\frac{\beta}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}\times 2\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1+\sin\alpha\sin\beta\right)$$

$$= \frac{1+\sin\alpha\sin\beta}{2}$$

2. 次の期待値を求めなさい.

(a) $\langle n\uparrow|S_x|n\uparrow\rangle =$

(b) $\langle n\uparrow|S_z|n\uparrow\rangle =$

3. 今日の講義でわかったこと・わからなかったこと・感想などを書きなさい. (自由記載)

番号　　　　　　　　　氏名

量子力学 No.9-2 Euler rotation

1. 方向ベクトル $\boldsymbol{n} = (a, b, c)$ として，行列

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} c & a - ib \\ a + ib & -c \end{pmatrix} \tag{2}$$

の固有値と固有ベクトルを求めなさい．ただし，$a^2 + b^2 + c^2 = 1$ とする．

2. 方向ベクトル $\boldsymbol{n} = (a, b, c) = (\sin\beta\cos\alpha, \sin\beta\sin\alpha, \cos\beta)$ として，

(a) $\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}$ を書き直しなさい．

(b) 表面の固有ベクトルを書き直しなさい．

$\sigma\cdot\mathbf{n}$の固有値問題

$$\sigma\cdot\mathbf{n} = \begin{pmatrix} n_z & n_x - i n_y \\ n_x + i n_y & -n_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta & e^{-i\alpha}\sin\beta \\ e^{i\alpha}\sin\beta & -\cos\beta \end{pmatrix}$$

$\sigma\cdot\mathbf{n}\chi = \lambda\chi$ より

$$\begin{vmatrix} \lambda - n_z & -n_x + i n_y \\ -n_x - i n_y & \lambda + n_z \end{vmatrix} = (\lambda - n_z)(\lambda + n_z) - (-n_x + i n_y)(-n_x - i n_y)$$

$$= \lambda^2 - n_z^2 - n_x^2 - n_y^2$$

$$= \lambda^2 - 1 = 0 \qquad \therefore \lambda = \pm 1$$

$\boxed{\lambda = 1 \text{のとき}}$

$$n_z\chi_+ + (n_x - i n_y)\chi_- = \chi_+$$

$$(1 - n_z)\chi_+ = (n_x - i n_y)\chi_-$$

従って、

$$\chi = C\begin{pmatrix} n_x - i n_y \\ 1 - n_z \end{pmatrix}$$

規格化条件 $\chi^\dagger\chi = 1$ より

$$C^* C\,(n_x + i n_y,\ 1 - n_z)\begin{pmatrix} n_x - i n_y \\ 1 - n_z \end{pmatrix} = |C|^2\{n_x^2 + n_y^2 + 1 - 2n_z + n_z^2\}$$

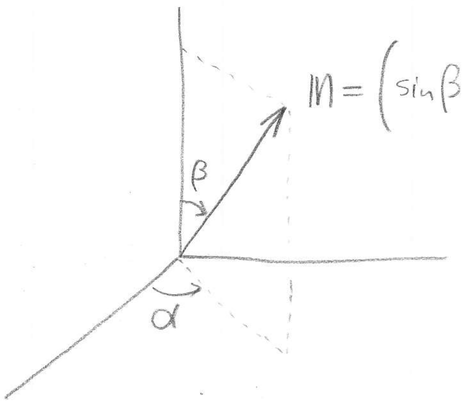
$$= |C|^2\{2 - 2n_z\} = 1$$

$$\therefore \chi = \frac{1}{\sqrt{2(1 - n_z)}}\begin{pmatrix} n_x - i n_y \\ 1 - n_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\alpha/2}\cos\frac{\beta}{2} \\ e^{i\alpha/2}\sin\frac{\beta}{2} \end{pmatrix}$$

$\boxed{\lambda = -1 \text{のとき}}$

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{2(1 + n_z)}}\begin{pmatrix} -n_x + i n_y \\ 1 + n_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{-i\alpha/2}\sin\frac{\beta}{2} \\ e^{i\alpha/2}\cos\frac{\beta}{2} \end{pmatrix}$$

今、下図のようなベクトルを考えると、



$\mathbb{n} = \left(\sin\beta\cos\alpha \ , \ \sin\beta\sin\alpha , \ \cos\beta \right)$

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{2(1-\cos\beta)}} \begin{pmatrix} \sin\beta\cos\alpha - i\sin\beta\sin\alpha \\ 1-\cos\beta \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\sin^2\frac{\beta}{2}}} \begin{pmatrix} e^{-i\alpha}\sin\beta \\ 2\sin^2\frac{\beta}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{\beta}{2}} \begin{pmatrix} 2e^{-i\alpha}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2} \\ 2\sin^2\frac{\beta}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-i\alpha}\cos\frac{\beta}{2} \\ \sin\frac{\beta}{2} \end{pmatrix}$$

Rotations in the Two-Component Formalism

$$\exp\left[-i\frac{\sigma\cdot n}{2}\phi\right] = 1 - i\frac{\sigma\cdot n}{2}\phi - \frac{1}{2!}\left(\frac{\sigma\cdot n}{2}\right)^2\phi^2 + \frac{i}{3!}\left(\frac{\sigma\cdot n}{2}\right)^3\phi^3 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\sigma\cdot n}{2}\right)^4\phi^4 + \cdots$$

$$= \left\{1 - \frac{(\sigma\cdot n)^2}{2!}\left(\frac{\phi}{2}\right)^2 + \frac{(\sigma\cdot n)^2}{4!}\left(\frac{\phi}{2}\right)^4 + \cdots\right\}$$

$$-i\left\{(\sigma\cdot n)\phi + \frac{(\sigma\cdot n)^3}{3!}\left(\frac{\phi}{2}\right)^3 + \cdots\right\}$$

$$= \cos\frac{\phi}{2} - i(\sigma\cdot n)\sin\frac{\phi}{2}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\frac{\phi}{2} - in_z\sin\frac{\phi}{2} & -in_x\sin\frac{\phi}{2} - n_y\sin\frac{\phi}{2} \\ -in_x\sin\frac{\phi}{2} + n_y\sin\frac{\phi}{2} & \cos\frac{\phi}{2} + in_z\sin\frac{\phi}{2} \end{bmatrix} \quad \cdots (3.2.45)$$

$$\left(e^{-i\frac{\sigma\cdot n}{2}\phi}\right)^\dagger\left(e^{-i\frac{\sigma\cdot n}{2}\phi}\right) =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\frac{\phi}{2} + in_z\sin\frac{\phi}{2} & in_x\sin\frac{\phi}{2} + n_y\sin\frac{\phi}{2} \\ in_x\sin\frac{\phi}{2} - n_y\sin\frac{\phi}{2} & \cos\frac{\phi}{2} - in_z\sin\frac{\phi}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\frac{\phi}{2} - in_z\sin\frac{\phi}{2} & -in_x\sin\frac{\phi}{2} - n_y\sin\frac{\phi}{2} \\ -in_x\sin\frac{\phi}{2} + n_y\sin\frac{\phi}{2} & \cos\frac{\phi}{2} + in_z\sin\frac{\phi}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2\frac{\phi}{2} + n_z^2\sin^2\frac{\phi}{2} + n_x^2\sin^2\frac{\phi}{2} + n_y^2\sin^2\frac{\phi}{2} & 0 \\ 0 & n_x^2\sin^2\frac{\phi}{2} + n_y^2\sin^2\frac{\phi}{2} + \cos^2\frac{\phi}{2} + n_z^2\sin^2\frac{\phi}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det\left(\exp\left[-i\frac{\sigma\cdot n}{2}\phi\right]\right) = 1$$