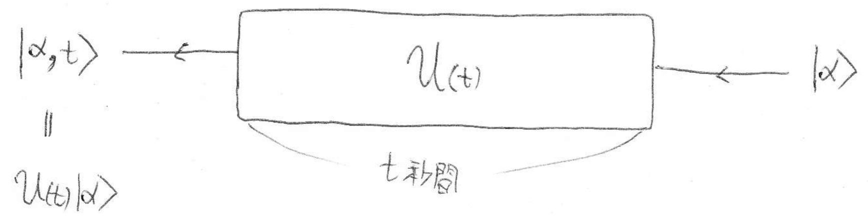
# Chapter 3. Quantum Dynamics

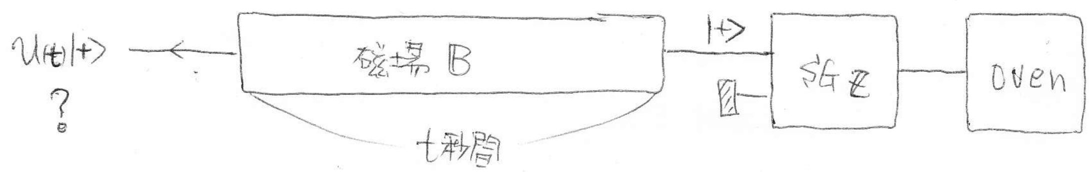
## 3.1 Time evolution and the Schrödinger equation

これから量子的状態$|\alpha\rangle$の時間発展を考えよう。

要請5




今後具体的にどういうものを考えるかというと、




(どういった確率を持つか?
〃　期待値　〃)

$U(t)$の持つべき性質として、

- 確率が保存 $\langle\alpha,t|\alpha,t\rangle = \langle\alpha|\alpha\rangle$ することより、

$$U^\dagger(t)\,U(t) = 1$$

- composition property

$$U(t_2, t_0) = U(t_2, t_1)\,U(t_1, t_0)$$

- $\lim_{t_1\to t_0} U(t_1, t_0) = U(t_0, t_0) = 1$

これらを満たすものとして

$$U(t_0+dt, t_0) = 1 - \frac{i}{\hbar} H\,dt$$

ここで$H$を「ハミルトニアン」という。これは、古典力学からきている用語だが、あまり気にしなくともよい。

以上から、

$$\mathcal{U}(t+dt, t_0) = \mathcal{U}(t+dt, t)\,\mathcal{U}(t, t_0) = \left(1 - \frac{iH}{\hbar}dt\right)\mathcal{U}(t, t_0)$$

$$\mathcal{U}(t+dt, t_0) - \mathcal{U}(t, t_0) = -\frac{i}{\hbar} H\, dt\, \mathcal{U}(t, t_0)$$

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{U}(t, t_0) = H\,\mathcal{U}(t, t_0)}$$ ····· Schrödinger equation for the time-evolution operator

**Case 1** ハミルトニアンが時間に独立のとき

$$\mathcal{U}(t, t_0) = \exp\left[-\frac{i}{\hbar} H(t - t_0)\right]$$

**Case 2** ハミルトニアンが時間に依存はするが、異なる時刻のハミルトニアンは交換可能なとき

$$\mathcal{U}(t, t_0) = \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} H(t')\,dt'\right]$$

例えば、磁場B ~~が~~ の大きさが時間とともに変化はするが、磁場の向きは変えない。

**Case 3** ハミルトニアンが時間に依存し、異なる時刻のハミルトニアンは非可換なとき。

例えば、異なる時刻で、別の方向から磁場をかける場合。

① Dyson series → 相互作用表示 / 時間に依存する摂動論 ··· 場の理論においても同じ手法が使える。

② Bloch equation → 緩和の導入

## 3.2 Hamiltonian

スピン$\frac{1}{2}$の電子が、外部磁場$\mathbb{B}$と相互作用しているときのハミルトニアンは、

$$H = +\frac{e}{m_e}\mathbb{S}\cdot\mathbb{B} = +\frac{e}{m_e}\frac{\hbar}{2}\sigma\cdot\mathbb{B} = +\mu_B\sigma\cdot\mathbb{B}$$

ここで、

電子の電荷 $e = 1.60\times10^{-19}$ C

ボーア磁子 $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 9.27\times10^{-24}$ J/T

具体的に書いてみると、

$$H = +\mu_B\begin{pmatrix} B_z & B_x - iB_y \\ B_x + iB_y & -B_z \end{pmatrix}$$

§1. $\mathbb{B} = (0, 0, B_0)$のとき

$$H = +\mu_B\begin{pmatrix} B_0 & 0 \\ 0 & -B_0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} +\frac{\hbar\omega_0}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\hbar\omega_0}{2} \end{pmatrix}$$ 　ここで $\hbar\omega_0 = 2\mu_B B_0$ とする

するとtime-evolution operatorは、

$$\mathcal{U}_z(t) = \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\left(+\mu_B\sigma_z B_0\right)t\right] = \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\sigma_z\frac{\hbar\omega_0}{2}t\right] = \exp\left[-\frac{i}{2}\sigma_z\omega_0 t\right]$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-i\omega_0 t/2} & 0 \\ 0 & e^{i\omega_0 t/2} \end{pmatrix}$$

(注) $\hbar\omega_0 = 2\mu_B B_0 = 2\frac{e\hbar}{2m_e}B_0 = 2\hbar\times\frac{eB_0}{2m_e} \equiv 2\hbar\omega_L$

$\omega_L = \frac{\omega_0}{2}$ のことを「Larmor周波数」という。

番号　　　　　　　氏名

# 量子力学 No.10 Time-evolution operator

**1.** $\boldsymbol{B} = (B_0, 0, 0)$ のとき

(a) ハミルトニアン $H$ を書きなさい．$\hbar\omega_0 = 2\mu_B B_0$ としなさい．

$$H = \mu_B \begin{pmatrix} 0 & B_0 \\ B_0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\hbar\omega_0}{2} \\ \frac{\hbar\omega_0}{2} & 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_x$$

(b) 時間発展演算子 $\mathcal{U}_x(t)$ の行列表示を求めなさい．

$$\mathcal{U}_x(t) = \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\left(\frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_x\right)t\right] = \exp\left[-\frac{i}{2}\sigma_x\omega_0 t\right]$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\frac{\omega_0 t}{2} & -i\sin\frac{\omega_0 t}{2} \\ -i\sin\frac{\omega_0 t}{2} & \cos\frac{\omega_0 t}{2} \end{pmatrix};$$

**2.** $\boldsymbol{B} = (0, B_0, 0)$ のとき

(a) ハミルトニアン $H$ を書きなさい．$\hbar\omega_0 = 2\mu_B B_0$ としなさい．

$$H = \mu_B \begin{pmatrix} 0 & -iB_0 \\ iB_0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_y$$

(b) 時間発展演算子 $\mathcal{U}_y(t)$ の行列表示を求めなさい．

$$\mathcal{U}_y(t) = \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\left(\frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_y\right)t\right] = \exp\left[-\frac{i}{2}\sigma_y \omega_0 t\right]$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\frac{\omega_0 t}{2} & -\sin\frac{\omega_0 t}{2} \\ \sin\frac{\omega_0 t}{2} & \cos\frac{\omega_0 t}{2} \end{pmatrix}$$

**3.** 今日の講義でわかったこと・わからなかったこと・感想などを書きなさい．(自由記載)