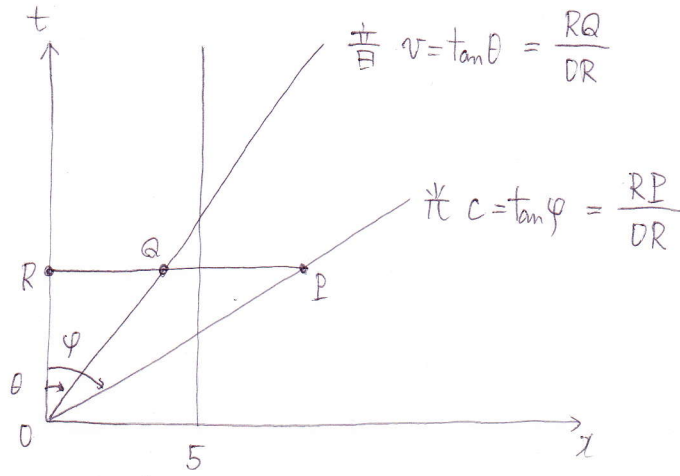


## 1.2 速度の合成則

K, K'系から見た物体の速さ  $v, v'$  の間には、どんな関係があるだろうか？



**特殊相対論 No.2** 速度の合成則 (特殊相対論 No.10 参照)

1. 静止系  $K$  からの観測

(a) 静止系  $K$  から見て、速さ  $V$  で動く座標系  $K'$  の原点の座標  $X$  および速さ  $v$  で動く物体の位置  $x$  を求め、以下の表を完成させなさい。

$t$ [s]	$X$ [m]	$V$ [m/s]	$x$ [m]	$v$ [m/s]
0	0	+0.5	0	+1
1	0.5		1	
2	1		2	
3	1.5		3	
4	2		4	
5	2.5		5	
6	3		6	
7	3.5		7	
8	4		8	
9	4.5		9	
10	5		10	

(b) 縦軸に  $K$  系の時刻  $t$ 、横軸に  $K$  系からみた位置  $x, X$  をとって、上の表をグラフに描きなさい。傾きは速さを表すので、以下では  $\tan \theta = V, \tan \varphi = v$  としよう。

2. 速さ  $V$  で動く  $K'$  系からの観測

(a) 速さ  $V$  で動いている系  $K'$  から見て、 $K$  系の原点の位置  $X'$  と物体の位置  $x'$ 、およびそれぞれの速さ  $V', v'$  を求め、以下の表を完成させなさい。

$t'$ [s]	$X'$ [m]	$V'$ [m/s]	$x'$ [m]	$v'$ [m/s]
0	0	-0.5	0	+0.5
1	-0.5		0.5	
2	-1		1	
3	-1.5		1.5	
4	-2		2	
5	-2.5		2.5	
6	-3		3	
7	-3.5		3.5	
8	-4		4	
9	-4.5		4.5	
10	-5		5	

(b) 2. の表の値を、1. で描いたグラフの中から読み込むために  $K'$  系の世界線上に時刻  $t'$  の目盛をとりなさい。

3. 2つの座標系から見た物体の速さ  $v, v'$  の関係式 (速度の合成則) を求めなさい。

$$v' = v - V$$

4. (速度の合成則)  $t-x$  座標系で,  $O(0, 0)$ ,  $P(10, 10)$ ,  $Q(10, 5)$ ,  $R(10, 0)$  とする.

(a)  $K'$  系から見た物体の速さ  $v'$  をグラフから読み取りなさい.

$$V = \frac{RQ}{OR} \quad v' = \frac{QR}{OQ}$$

$$v = \frac{RP}{OR} \quad v' = \frac{QP}{OQ} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} = +0.5$$

(b) 三角形  $OPQ$  に対して正弦定理を使うことによって,  $v' = \frac{PQ}{OQ}$  を計算し, 速度の合成則を導きなさい.

$$\frac{OQ}{\sin(\frac{\pi}{2}-\varphi)} = \frac{PQ}{\sin(\varphi-\theta)}$$

$$\therefore \frac{PQ}{OQ} = \frac{\sin(\varphi-\theta)}{\sin(\frac{\pi}{2}-\varphi)} = \frac{\sin\varphi\cos\theta - \cos\varphi\sin\theta}{\sin\frac{\pi}{2}\cos\varphi - \cos\frac{\pi}{2}\sin\varphi} = \cos\theta\tan\varphi - \sin\theta = \frac{v}{\sqrt{1+v^2}} - \frac{V}{\sqrt{1+v^2}}$$

一方2,

$$\frac{PQ}{OQ} = \frac{x'}{t'\sqrt{1+v^2}} = \frac{v'}{\sqrt{1+v^2}}$$

したがって,

$$v' = v - V$$

5. Galilei 変換の式は

$$\begin{cases} t' = t \\ x' = x - Vt \end{cases} \quad (1)$$

と書くことができる。

(a) 式(1)から, 速度の合成則を導きなさい.  $v' = \frac{dx'}{dt'}$  を計算する.

$$v' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - Vdt}{dt} = \frac{dx}{dt} - V = v - V$$

(b) もう一度で微分することにより, 加速度を求めなさい.  $a' = \frac{dv'}{dt'}$  を計算する. Newton の運動方程式は, Galilei 変換に対して不変であるか.

$$a' = \frac{dv'}{dt'} = \frac{d}{dt}(v - V) = \frac{dv}{dt} = a \quad \dots \text{加速度は変わらない。}$$

したがって, Newton の運動方程式は

Galilei 変換に対して不変である。

6. 今日の講義でわかったこと・わからなかったこと・感想などを書きなさい. (自由記載)

