§2. Lorentz変換の図解化，読み方

※固有時 世界線の長さである。つまり，世界線にいる人の持っている時間である。

ローレンツ不変量として固有時 τ を導入する。

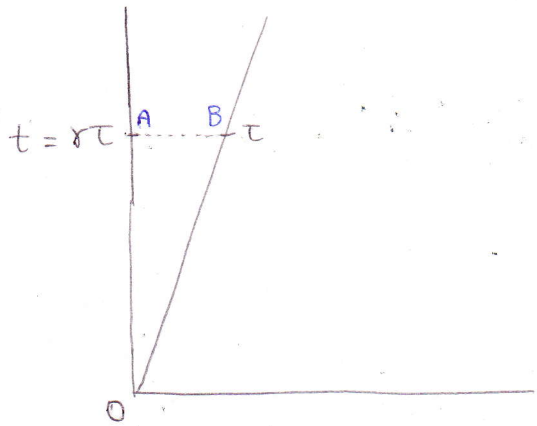
$$-c^2(d\tau)^2 = -c^2(dt)^2\left\{1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right\}$$

$$d\tau = dt\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$$ ……vは静止系から見た粒子の速さである。

いま，$v=V$のときを考えると，

$$\tau = \int_0^t dt'\sqrt{1-(V/c)^2} = \sqrt{1-(V/c)^2}\int_0^t dt'$$

$$= \sqrt{1-(V/c)^2}\times t = \frac{t}{\gamma}$$



世界線の長さは，直線で結ぶOAが一番大きい。

実際

$$t=OA=8 > \tau=OB=\frac{8}{\gamma}=6.96$$

番号　　　　　　　　氏名

特殊相対論 No.6 Lorentz 変換の図解化，読み方

1. $w = ct$，$\beta = \frac{V}{c}$，$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ として Lorentz 変換は

$$\begin{pmatrix} w' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ x \end{pmatrix} \tag{1}$$

となる．$V = \frac{c}{2}$ のとき $w - x$，$w' - x'$ 軸を書き入れなさい．

2. $V = \frac{c}{2}$ のとき，$\beta = 0.5$，$\gamma = 1.15$ であった．Lorentz 変換の式 (1) に $(w, x) = (10, 8)$ を代入して，(w', x') の値を求めなさい．

$w' = 10\gamma - 8\beta\gamma = 1.15 \times (10 - 8 \times 0.5) = 1.15 \times 6 = 6.90$

$x' = -10\beta\gamma + 8\gamma = 1.15 \times (-10 \times 0.5 + 8) = 1.15 \times 3 = 3.45$

3. 時空図上の点 $(w, x) = (10, 8)$ は，$V = \frac{c}{2}$ で走る K' 系での値 (w', x') をグラフから次の 2 通りのやり方で読み取りなさい．時空図上の点から，w' 軸，x' 軸に平行におろした点の座標を読む．

(a) 原点から w'，x' 軸を実測して，α_r で割る．

$w' = \frac{8.99}{\alpha_r} = \frac{8.99}{1.29} = 6.97$

$x' = \frac{4.45}{\alpha_r} = \frac{4.45}{1.29} = 3.45.$

(b) w'，x' 軸から w，x に垂線をおろして座標を読み，その値を γ で割る．

$w' = \frac{8}{\gamma} = \frac{8}{1.15} = 6.96$

$x' = \frac{4}{\gamma} = \frac{4}{1.15} = 3.48$

4. Lorentz 変換の式 (1) の逆変換を求めなさい.

$$\begin{cases} w' = \gamma w - \beta\gamma x \\ x' = -\beta\gamma w + \gamma x \end{cases} \iff \begin{cases} w = \gamma w' + \beta\gamma x' \\ x = \beta\gamma w' + \gamma x' \end{cases}$$

5. 時空図上の任意の点 $(w, x) = (w', x')$ を，各座標系 K，K' から見たときの関係式 (1) を時空図から読みこみなさい.

6. K' 系から見た点 $(w', x') = (0, 8)$ がある。

(a) 時空図を描いて，(w, x) を読みこみなさい.

$w = 4.65$

$x = 9.25$

(b) 前問で求めた逆変換の式に代入して，K 系からみた座標 (w, x) を求めなさい.

$w = 8\beta\gamma = 8 \times 0.5 \times 1.15 = 4.60$

$x = 8\gamma = 8 \times 1.15 = 9.20$

7. K' 系から見た点 $(w', x') = (6, 0)$ がある。

(a) 時空図を描いて，(w, x) を読みこみなさい.

$w = 6.93$

$x = 3.44$

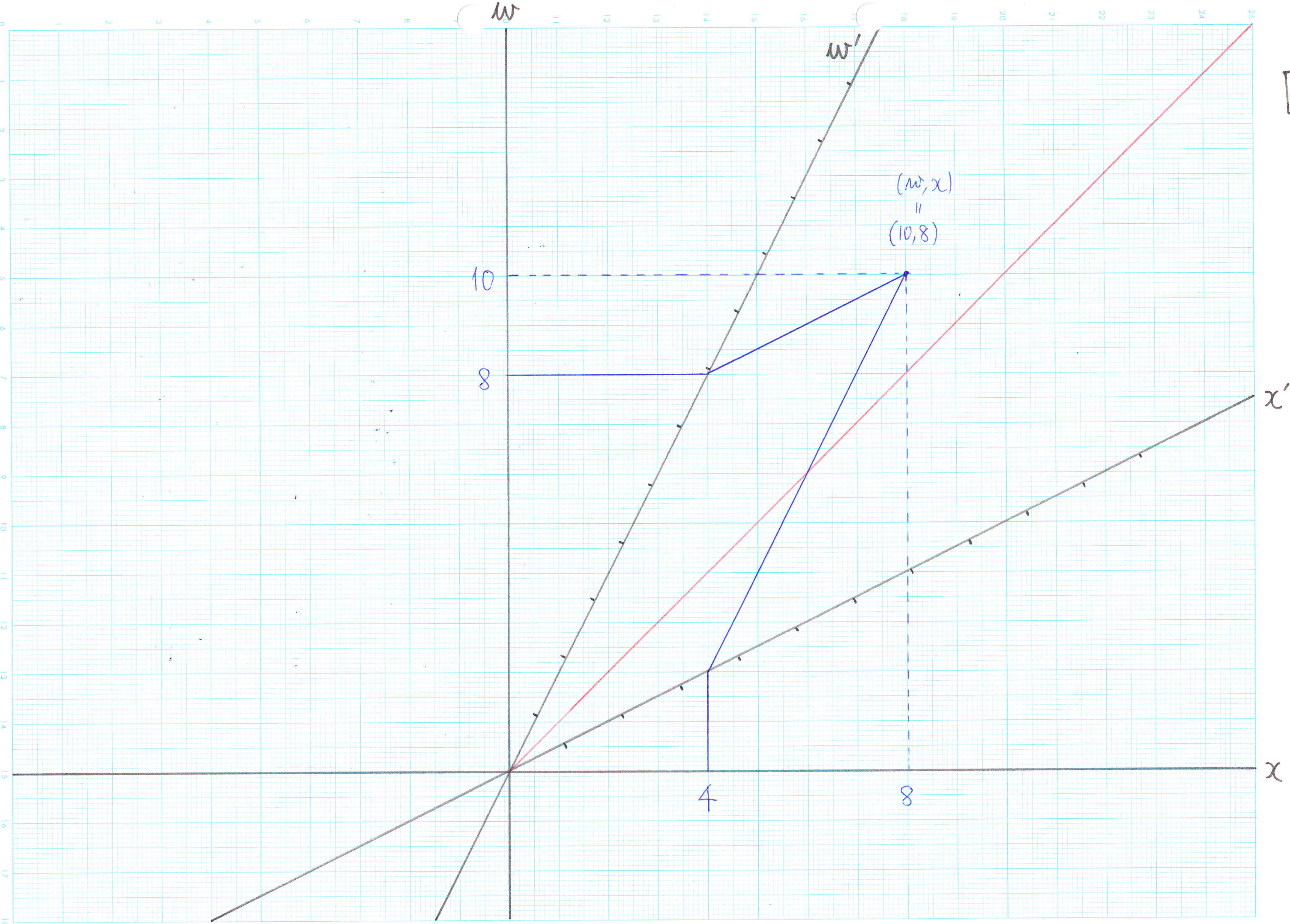
(b) 前々問で求めた逆変換の式に代入して，K 系からみた座標 (w, x) を求めなさい.

$w = 6\gamma = 6 \times 1.15 = 6.90$

$x = 6\beta\gamma = 6 \times 0.5 \times 1.15 = 3.45$

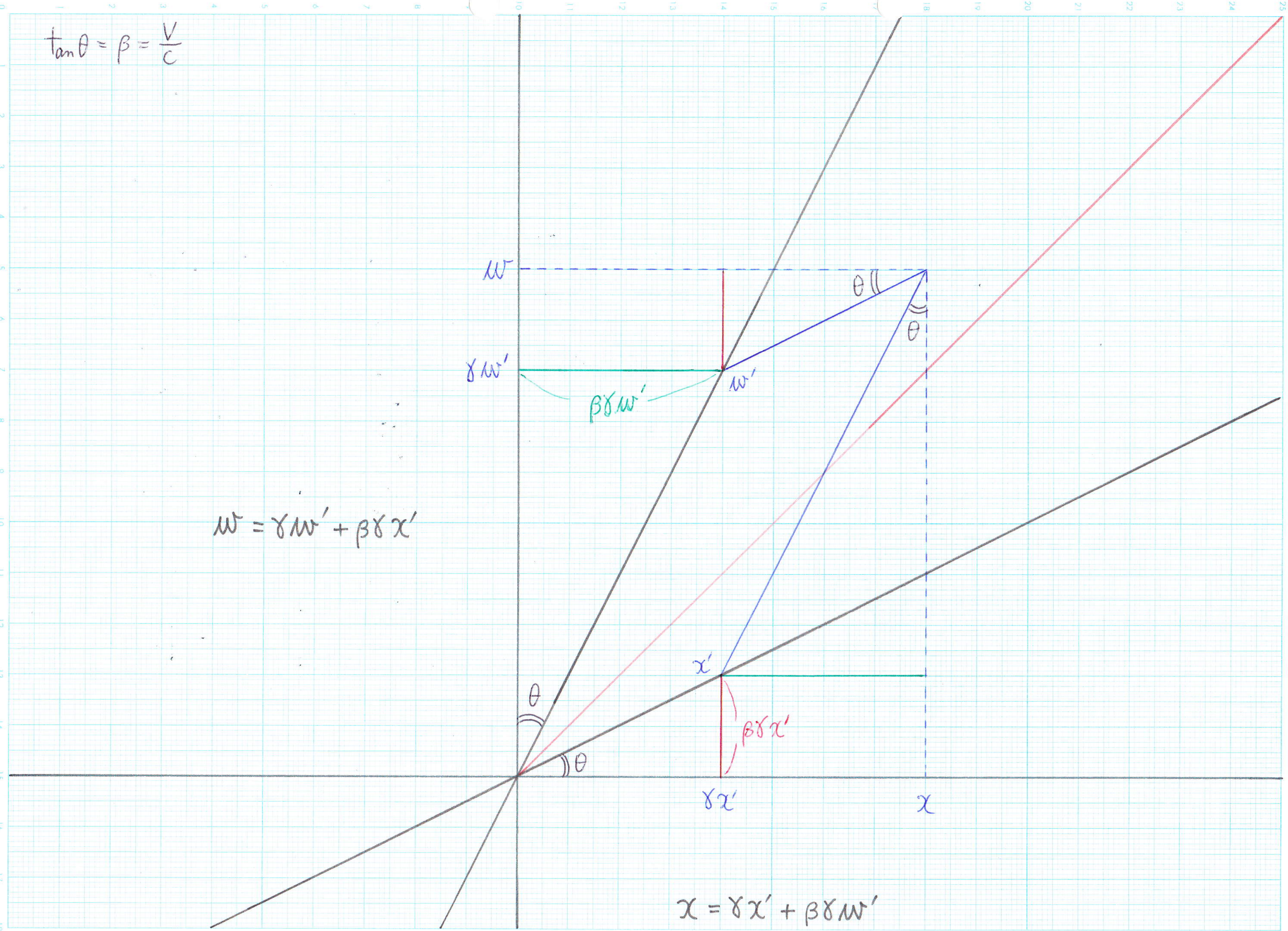
8. 今日の講義でわかったこと・わからなかったこと・感想などを書きなさい. (自由記載)

3



$\tan\theta = \beta = \dfrac{V}{c}$

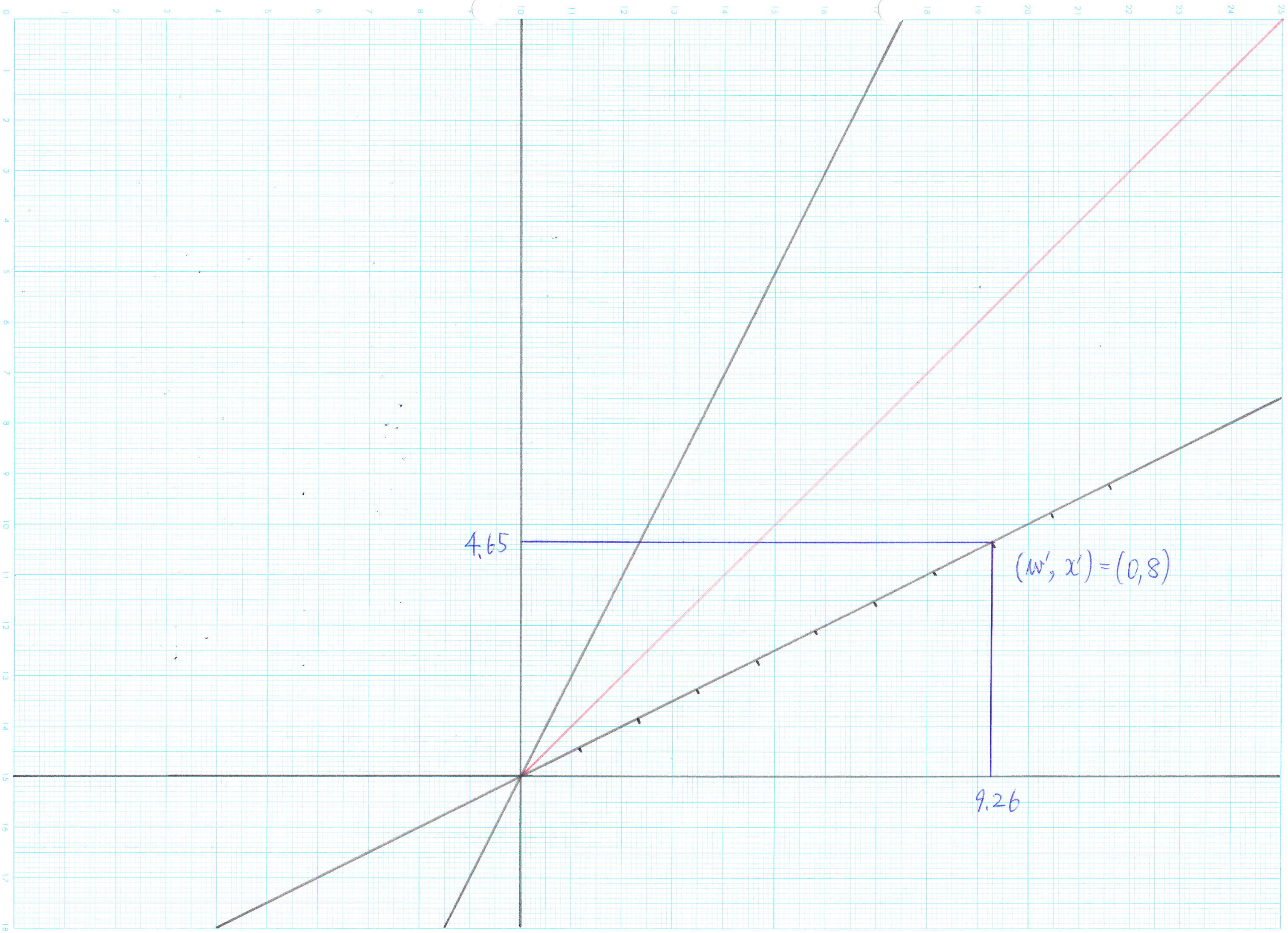
5



$$w = \gamma w' + \beta\gamma x'$$

$$x = \gamma x' + \beta\gamma w'$$

6



7