番号　　　　　　　　　　氏名

特殊相対論 No.10

速度の合成則 (特殊相対論 No. 2 参照)

1. 静止している K 系から見て $v = +0.8c$ で動く物体がある．この物体を $V = +0.5c$ で動く K' 系から見た速さ v' を求めたい．

(a) K，K' の座標軸を書き，$v = +0.8c$ で動く物体の世界線を描きなさい．

(b) 時空図上で $\mathrm{A}(w_A, x_A) = (8, 4)$，$\mathrm{B}(w_B, x_B) = (10, 8)$ を定義する．OA および AB を実測して，$\frac{v'}{c} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{OA}}$ を計算しなさい．この量が，K' 系からみた物体の速さとなる．

$$\frac{v'}{c} = \frac{AB}{OA} = \frac{4.50}{8.93} \fallingdotseq 0.504$$

(c) 三角形 OAB に正弦定理をあてはめて，速度の合成則を求めなさい．傾きは速さを表すので，$\tan\theta = \frac{V}{c}$，$\tan\varphi = \frac{v}{c}$ とする．

$$\frac{v'}{c} = \frac{AB}{OA} = \frac{\sin(\varphi-\theta)}{\cos(\varphi+\theta)} = \frac{\sin\varphi\cos\theta - \cos\varphi\sin\theta}{\cos\varphi\cos\theta - \sin\varphi\sin\theta}$$

$$= \frac{\tan\varphi - \tan\theta}{1 - \tan\varphi\tan\theta} = \frac{\frac{v}{c} - \frac{V}{c}}{1 - \frac{vV}{c^2}}$$

したがって，

$$v' = \frac{v - V}{1 - \frac{vV}{c^2}}$$

(d) 上で求めた式に $v = +0.8c$ および $V = +0.5c$ を代入し，v' を求めなさい．

$$v' = \frac{0.8c - 0.5c}{1 - 0.8 \times 0.5} = \frac{0.3c}{0.6} = 0.5c$$

2. 次の速度の合成を，時空図と合成則の式の両方で求めなさい．

(a) 速さ $v = +c$ と速さ $V = +0.5c$ の合成を求めなさい．

$$v' = \frac{c - 0.5c}{1 - 1 \times 0.5} = \frac{0.5c}{0.5} = c$$

(b) 速さ $v = +0.5c$ と速さ $V = -0.5c$ の合成を求めなさい．

$$v' = \frac{0.5c + 0.5c}{1 + 0.5 \times 0.5} = \frac{c}{1.25} = 0.8c$$

時空図では

$$\frac{v'}{c} = \frac{AB}{OA} = \frac{8.93}{11.19} = 0.798$$

(c) 光速 $v = +c$ と光速 $V = -c$ の合成を求めなさい．

$$v' = \frac{c + c}{1 + 1} = \frac{2c}{2} = c$$

3. Lorentz 変換の式から，次の問に答えなさい．

$$t' = \gamma t - \gamma \frac{V}{c^2} x \tag{1}$$

$$x' = -\gamma V t + \gamma x \tag{2}$$

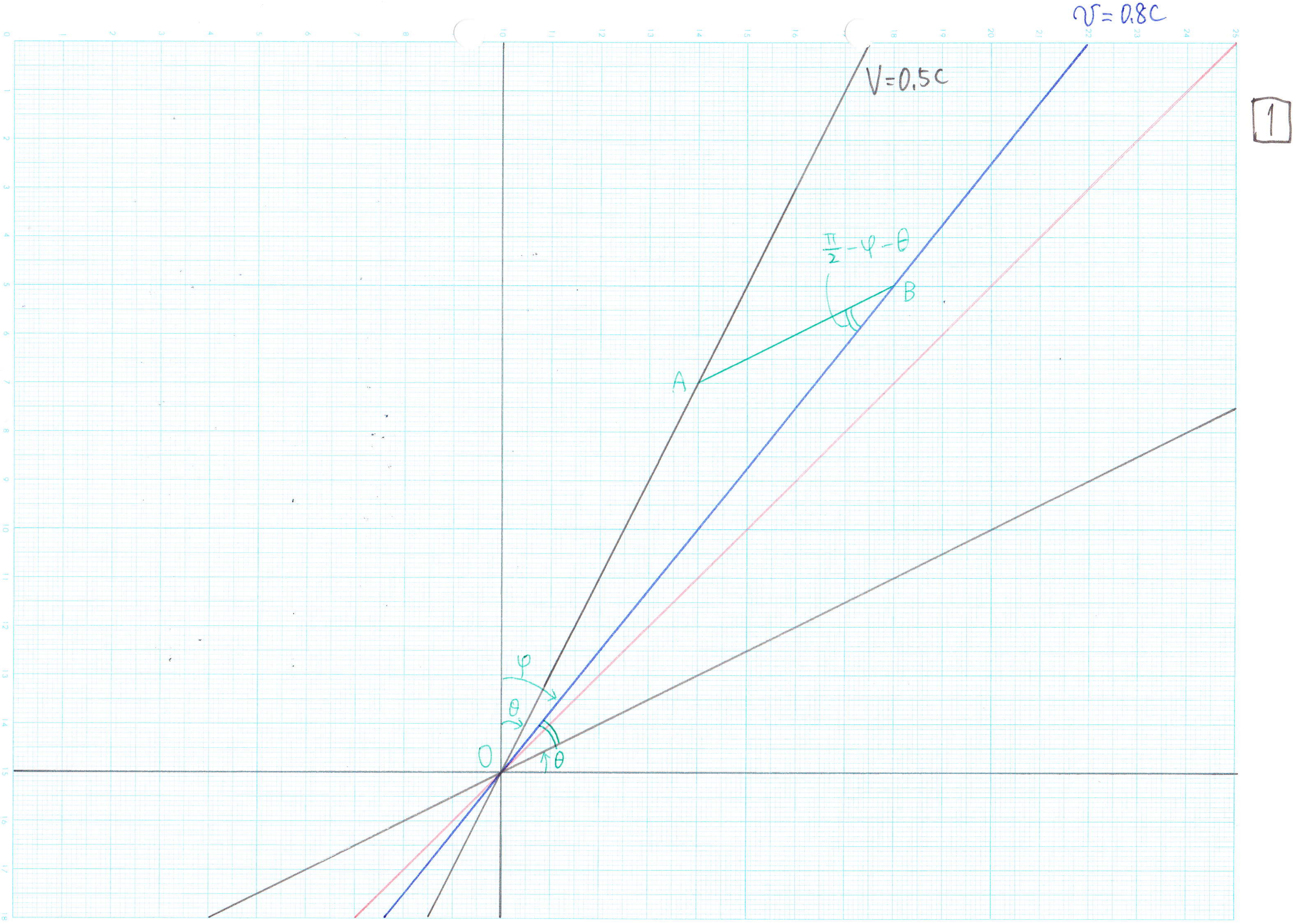
(a) 速度の合成則を求めなさい． $v' = \frac{dx'}{dt'}$， $v = \frac{dx}{dt}$ である．

$$v' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{-\gamma V dt + \gamma dx}{\gamma dt - \gamma \frac{V}{c^2} dx} = \frac{-\gamma V + \gamma \frac{dx}{dt}}{\gamma - \gamma \frac{V}{c^2} \frac{dx}{dt}} = \frac{-V + v}{1 - \frac{Vv}{c^2}}$$

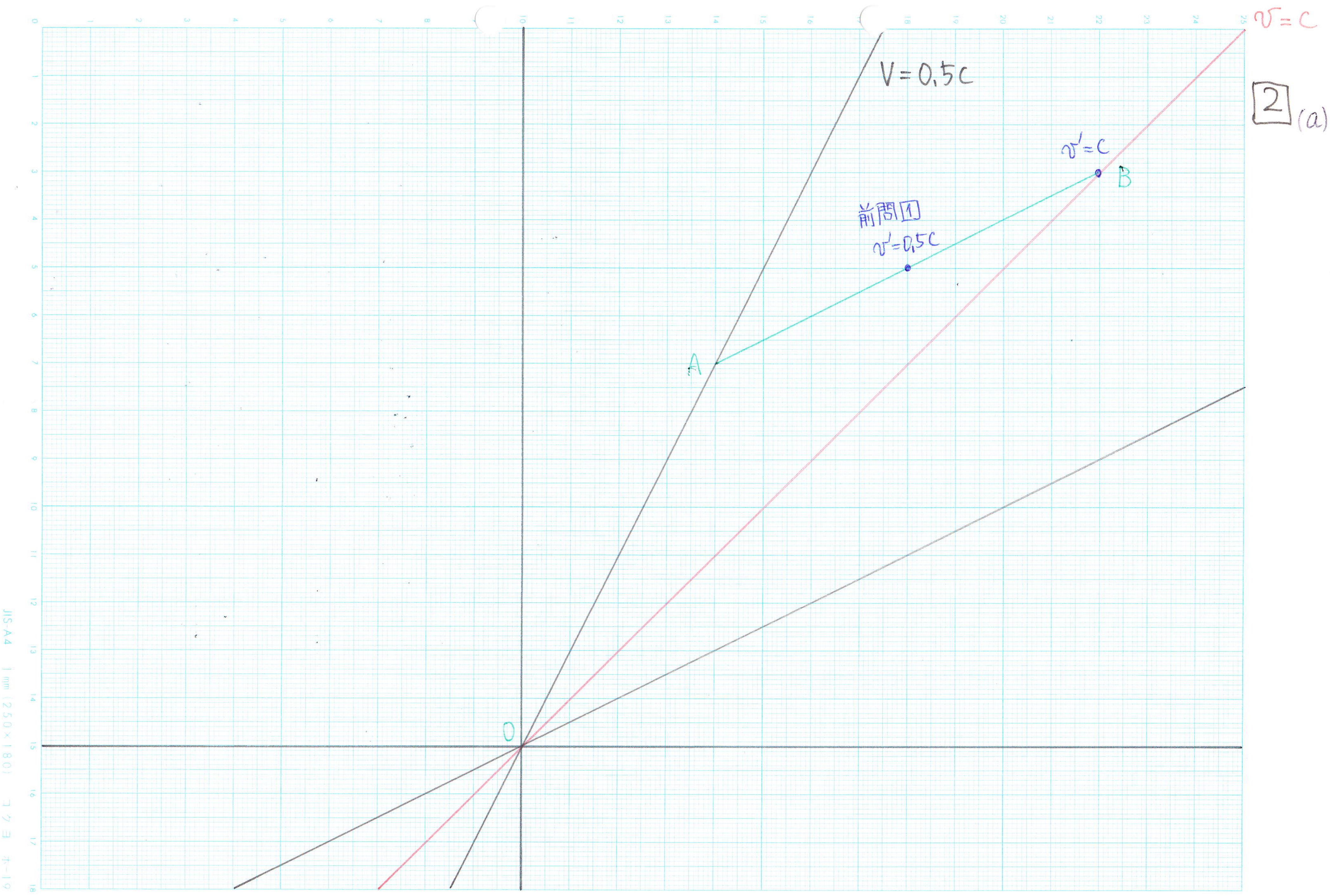
(b) $c \to \infty$ のとき，Newton 力学での速度の合成則になることを示しなさい．

$$v' = \frac{v - V}{1 - \frac{vV}{c^2}} \longrightarrow v - V \quad (c \to \infty)$$

4. 今日の講義でわかったこと・わからなかったこと・感想などを書きなさい．(自由記載)

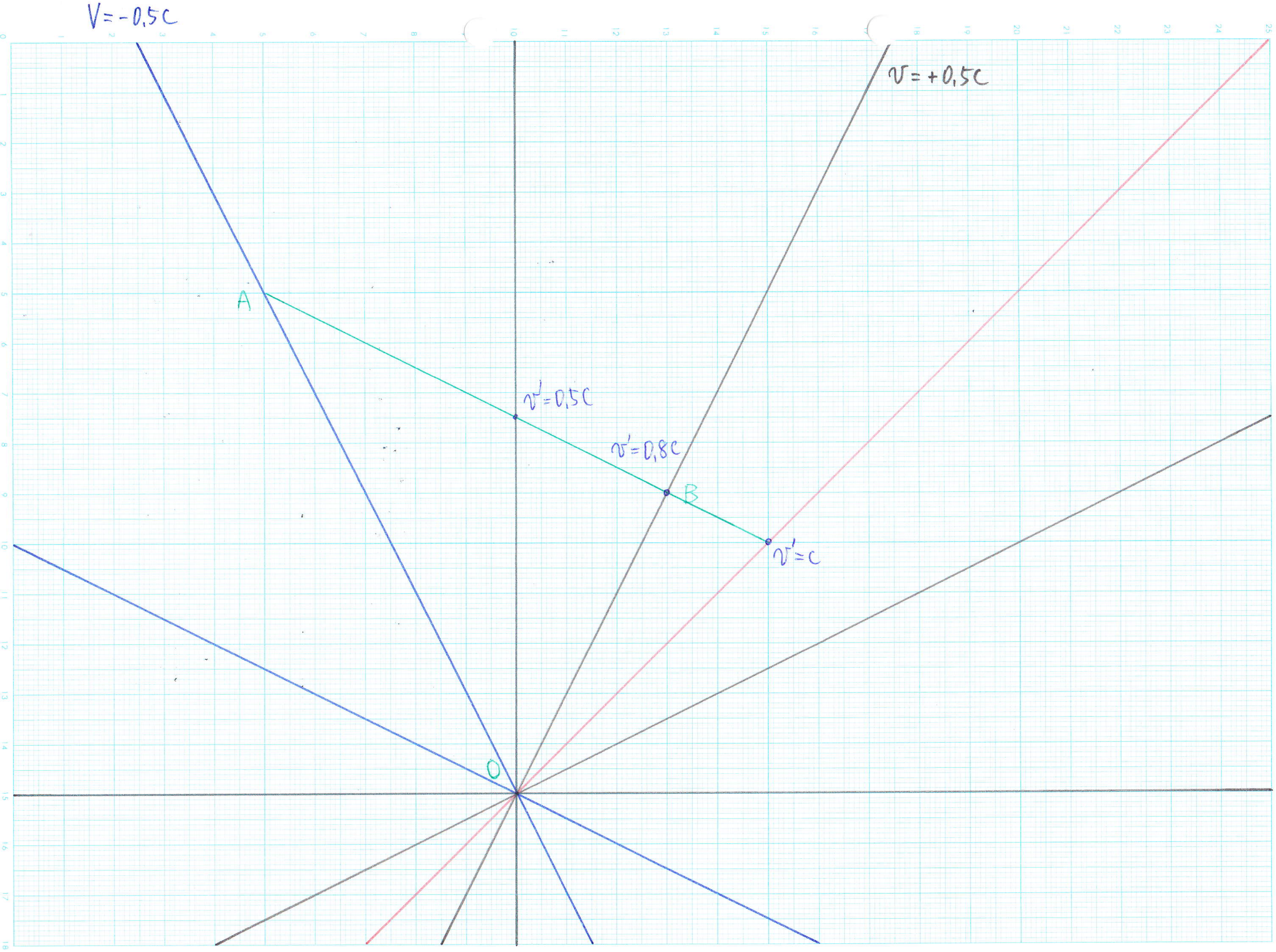


$v = 0.8c$
$V = 0.5c$
1
$\frac{\pi}{2} - \varphi - \theta$
A
B
φ
θ
O
θ

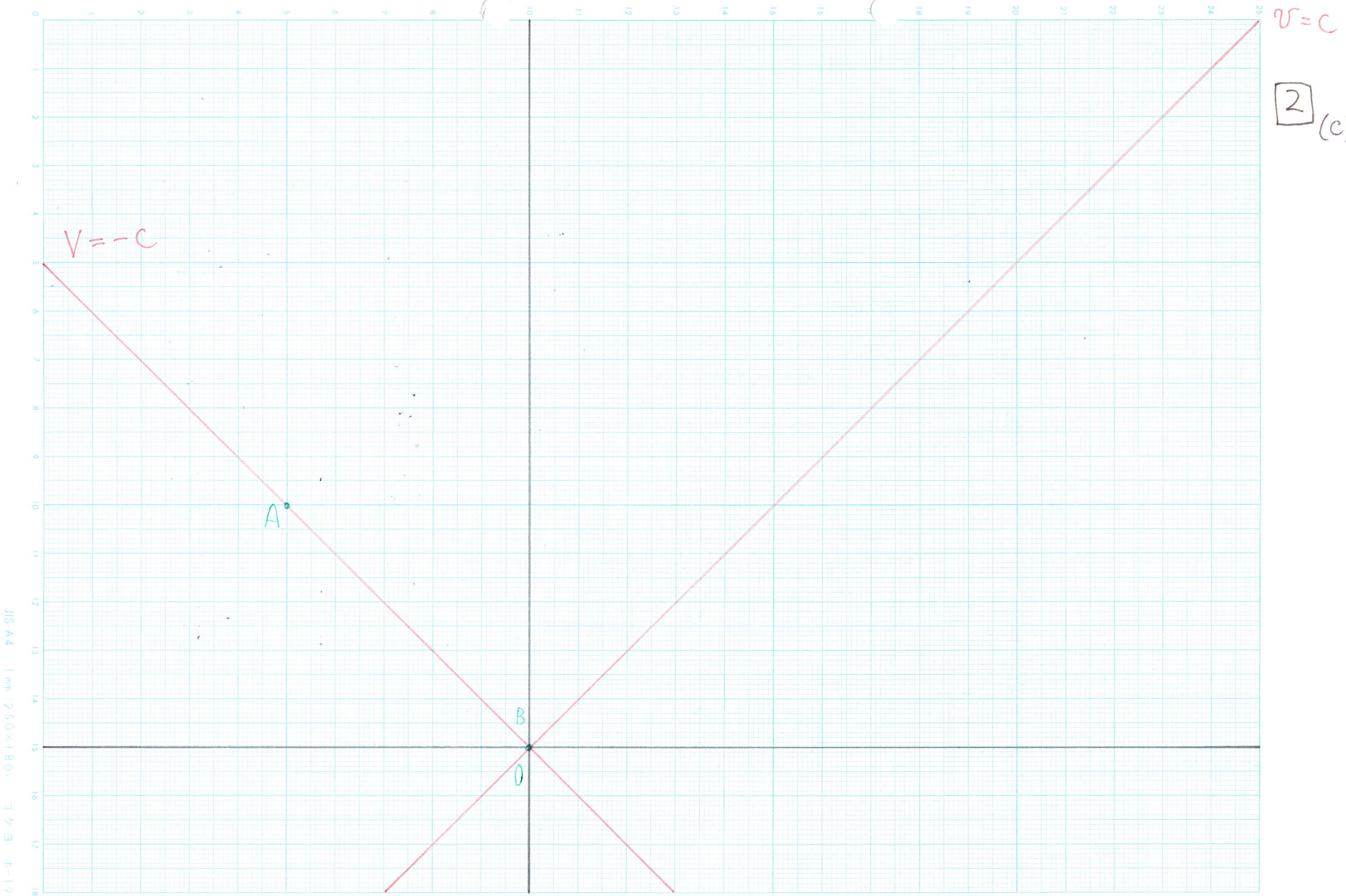


$v = c$
$V = 0.5c$
2 (a)
$v' = c$
B
前問1
$v' = 0.5c$
A
O

$\boxed{2}$ (b)



$\boxed{2}$ (c)



番号　　　　　　　　氏名

特殊相対論 No.10-2 速度の合成則

1. 速度の合成則 $v' = \frac{v-V}{1-vV/c^2}$ から次の問いに答えなさい．$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(V/c)^2}}$ である．

(a) $\frac{1}{\sqrt{1-(v'/c)^2}} = \gamma \frac{1-vV/c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$ となることを示しなさい．

$$1-\left(\frac{v'}{c}\right)^2 = 1-\left(\frac{v/c-V/c}{1-vV/c^2}\right)^2 = \frac{1}{(1-vV/c^2)^2}\left\{\left(1-\frac{vV}{c^2}\right)^2-\left(\frac{v}{c}-\frac{V}{c}\right)^2\right\}$$

$$= \frac{1}{(1-vV/c^2)^2}\left(1-\cancel{\frac{2vV}{c^2}}+\frac{v^2V^2}{c^4}-\frac{v^2}{c^2}+\cancel{\frac{2vV}{c^2}}-\frac{V^2}{c^2}\right)$$

$$= \frac{1}{(1-vV/c^2)^2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)$$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{1-(v'/c)^2}} = \frac{1-\frac{vV}{c^2}}{\sqrt{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)}} = \gamma\frac{1-\frac{vV}{c^2}}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

(b) $\frac{c}{\sqrt{1-(v'/c)^2}}$, $\frac{v'}{\sqrt{1-(v'/c)^2}}$ を c, v, V, γ で表しなさい．さらに $u^0 = \frac{c}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$, $u^1 = \frac{v}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$ とおくと，(u^0, u^1) が (w, x) と同じ変換となっていることを示しなさい．

$$\frac{c}{\sqrt{1-(v'/c)^2}} = \gamma\frac{c}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - \gamma\frac{V}{c}\frac{v}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \gamma u^0 - \beta\gamma u^1$$

$$\frac{v'}{\sqrt{1-(v'/c)^2}} = \gamma\frac{\cancel{1-\frac{vV}{c^2}}}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \times \frac{v-V}{\cancel{1-\frac{vV}{c^2}}} = \gamma\frac{v}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - \gamma\frac{V}{c}\frac{c}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

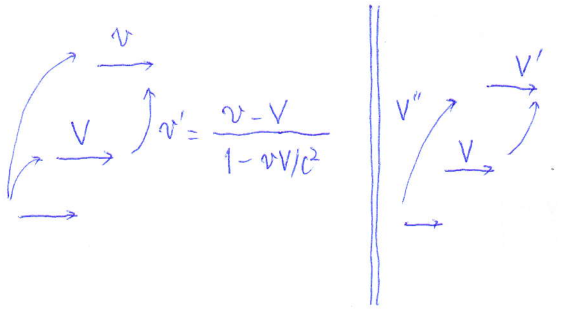
$$= \gamma u^1 - \beta\gamma u^0$$

したがって，

$$\begin{pmatrix} u'^0 = \gamma u^0 - \beta\gamma u^1 \\ u'^1 = -\beta\gamma u^0 + \gamma u^1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} w' = \gamma w - \beta\gamma x \\ x' = -\beta\gamma w + \gamma x \end{pmatrix}$$

2. Lorentz 変換を 2 回続けて行った結果が，また Lorentz 変換になることを示したい．

(a) K 系に対し K' 系が速度 V で動き，K' 系に対して K'' 系が速度 V' で動くとき，K 系に対する K'' 系の速度を V'' とする．V'' を V，V' を使って表しなさい．



$$v' = \frac{v - V}{1 - vV/c^2}$$

$$V' = \frac{V'' - V}{1 - VV''/c^2}$$

これを V'' について解いて

$$V'' = \frac{V + V'}{1 + VV'/c^2}$$

(b) 上式から

$$\gamma'' = \gamma\gamma'\left(1 + \frac{VV'}{c^2}\right), \qquad \gamma'' V'' = \gamma\gamma'(V + V') \tag{3}$$

を示しなさい．

$$\gamma''^2 = \frac{1}{1 - (V''/c)^2} = \frac{1}{1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{V+V'}{1+VV'/c^2}\right)^2} = \frac{(1 + VV'/c^2)^2}{1 + 2\frac{VV'}{c^2} + \left(\frac{VV'}{c^2}\right)^2 - \frac{1}{c^2}(V^2 + 2VV' + V'^2)}$$

$$= \frac{(1+VV'/c^2)^2}{1 - \frac{V^2}{c^2} - \frac{V'^2}{c^2} + \left(\frac{VV'}{c^2}\right)^2} = \frac{(1+VV'/c^2)^2}{\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)\left(1 - \frac{V'^2}{c^2}\right)}$$

よって $\gamma'' = \gamma\gamma'\left(1 + \frac{VV'}{c^2}\right)$

これに V'' をかけて

$$\gamma'' V'' = \gamma\gamma'\left(1 + \frac{VV'}{c^2}\right) \times \frac{V + V'}{1 + VV'/c^2} = \gamma\gamma'(V + V')$$

(c) 次の式を証明しなさい．

$$\begin{pmatrix} t'' \\ x'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma' & -\gamma' V'/c^2 \\ -\gamma' V' & \gamma' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma V/c^2 \\ -\gamma V & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma'' & -\gamma'' V''/c^2 \\ -\gamma'' V'' & \gamma'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma\gamma' + \gamma\gamma' VV'/c^2 & -\gamma\gamma' V/c^2 - \gamma\gamma' V'/c^2 \\ -\gamma\gamma' V' - \gamma\gamma' V & \gamma\gamma' VV'/c^2 + \gamma\gamma' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma\gamma'\left(1 + \frac{VV'}{c^2}\right) & -\gamma\gamma' \frac{V+V'}{c^2} \\ -\gamma\gamma'(V+V') & \gamma\gamma'\left(1 + \frac{VV'}{c^2}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$$