2.4 波動の振舞

§1. 波数4元ベクトル

3次元空間を、波数ベクトル $\mathbb{k}$ の方向に進む正弦波は、

この波の進む速さ u は、

$$u = \frac{\omega}{|\mathbb{k}|} = \frac{2\pi\nu}{2\pi/\lambda} = \nu\lambda$$

$$\phi(t, x) = A\sin(\omega t - \mathbb{k}\cdot x + \alpha)$$

$$= A\sin(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \alpha)$$

と書くことができる。この波を、x 軸正方向に $+V$ で動く座標系 K' から見る。

Lorentz逆変換を使って

$$\phi(t, x) = A\sin\left(\omega\frac{t' + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1-\beta^2}} - k_x\frac{Vt' + x'}{\sqrt{1-\beta^2}} - k_y y' - k_z z' + \alpha\right)$$

$$= A\sin\left(\frac{\omega - Vk_x}{\sqrt{1-\beta^2}}t' - \frac{k_x - \frac{V}{c^2}\omega}{\sqrt{1-\beta^2}}x' - k_y y' - k_z z' + \alpha\right)$$

$$\equiv A\sin(\omega' t' - k_x' x' - k_y' y' - k_z' z' + \alpha) = \phi'(t', x')$$ ……スカラー関数なので。

ここで、

$$\omega' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\omega - \frac{V}{\sqrt{1-\beta^2}}k_x$$

$$k_x' = \frac{-\frac{V}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}\omega + \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}k_x$$

$$k_y' = k_y$$

$$k_z' = k_z$$

である。これは座標 (t, x) と同じ変換をするので4元ベクトルとよばれる。

$k^0 = \omega/c$ とすると、

$$[k^0] = \left[\frac{\omega}{c}\right] = \frac{1/\mathrm{sec}}{\mathrm{m/sec}} = \frac{1}{\mathrm{m}}$$

$$k^{0\prime} = \gamma k^0 - \gamma\beta k^1$$

$$k^{1\prime} = -\beta\gamma k^0 + \gamma k^1$$

$$k^{2\prime} = k^2$$

$$k^{3\prime} = k^3$$

※photonのとき

$$E = \hbar\omega, \quad \mathbb{P} = \hbar\mathbb{k}$$

なので、

$$\left.\begin{aligned} p^0 &= \frac{E}{c} = \frac{\hbar\omega}{c} \\ \mathbb{P} &= \hbar\mathbb{k} \end{aligned}\right\}$$ で4元ベクトルを構成する。

§2. ドップラー効果

K系で角振動数ωに見える波動は、K'系ではどうなるだろうか？

K系で $\mathbb{k}$ が x 軸となす角を θ とする。

$$k_x = |\mathbb{k}|\cos\theta$$

したがって、

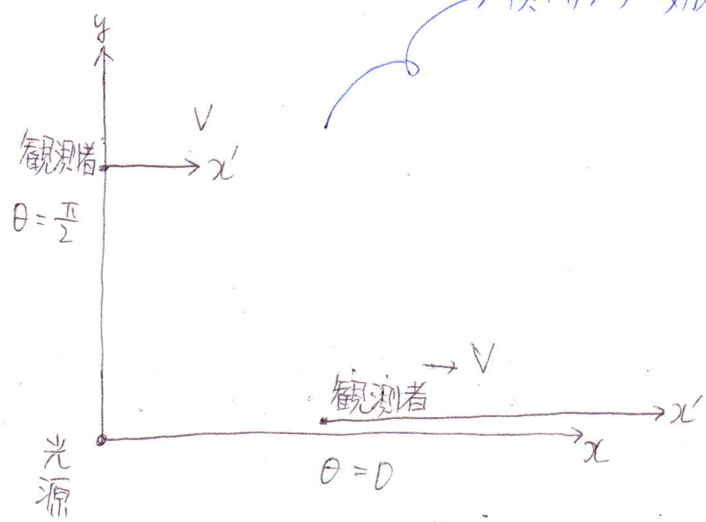
$$\frac{k_x}{k_0} = \frac{k_x}{|\mathbb{k}|} \times \frac{|\mathbb{k}|}{k_0} = \cos\theta \times \frac{\omega/v}{\omega/c} = \frac{c}{v}\cos\theta$$

波数4元ベクトルの変換式の第0成分の式から、

$$\frac{k^{0\prime}}{k^0} = \frac{\omega'/c}{\omega/c} = \frac{2\pi\nu'/c}{2\pi\nu/c} = \gamma - \gamma\beta\frac{k^1}{k^0} = \frac{1-\beta\frac{c}{v}\cos\theta}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

とくに光のときは $v = c$ なので、

$$\nu' = \nu \times \frac{1-\beta\cos\theta}{\sqrt{1-\beta^2}}$$



横ドップラー効果 $\nu' = \nu \times \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$

縦ドップラー効果

$$\nu' = \nu \times \frac{1-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \nu \times \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

番号　　　　　　　氏名

特殊相対論 No.11

光の縦ドップラー効果 (特殊相対論 No. 3 参照)

1. 原点に静止した光源から，周期 $T = 1$ s で光を放出する．光は x 軸正方向に $+c$ すなわち $\beta = +1$ で進む．波面の様子を，時空図に書き込みなさい．

2. 振動数 ν〔Hz〕を求めなさい．

$\nu T = 1$ より　$\nu = \frac{1}{T} = 1$ Hz

3. x 軸に平行に線を入れると，波面の間の距離が波長 λ である．w 軸に平行に線を入れると，波面の間の距離が周期 cT である．時空図の中で，cT と λ が読めるか．ここで，$\tan(\frac{\pi}{4}) = \frac{\lambda}{cT} = \frac{\nu\lambda}{c}$ となっていることを確かめなさい．

4. 時刻 $t = 0$ s に原点から速さ $V = +0.5c$ で動く観測者 K' 系の座標軸 $w' - x'$ を書き入れなさい．

5. ドップラー効果

(a) K' 系で 5 個目の波面が w' 軸と交わる点を B とする．K' 系にいる人が読む時間 cT' を求めなさい．

$$cT' = \frac{OB}{\alpha_r} = \frac{11.20}{1.29} = 8.68$$

(b) 時間 cT' で 5 個の波面が来ることから，K' 系の人が観測する振動数 ν' は何 Hz か．

$$\nu' = \frac{5個}{8.68} = 0.576 \text{ Hz}$$

(c) $(w, x) = (5, 0)$ を A として，三角形 OAB に正弦定理を使うことによって，相対論的ドップラー効果の式を導きなさい．

$$\frac{OA}{OB} = \frac{\sin(\frac{\pi}{4} - \theta)}{\sin\frac{3}{4}\pi} = \frac{\sin\frac{\pi}{4}\cos\theta - \cos\frac{\pi}{4}\sin\theta}{\sin\frac{3}{4}\pi} = \cos\theta - \sin\theta$$

一方で $n = 5$ として，

$$OA = ncT = \frac{nc}{\nu}$$

$$OB = ncT'\alpha_r = \frac{nc}{\nu'}\alpha_r$$

よって，

$$\nu' = (\cos\theta - \sin\theta) \times \alpha_r \times \nu = \left(\frac{1}{\sqrt{1+\beta^2}} - \frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}\right) \times \sqrt{\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}} \times \nu = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \times \nu$$

(d) $V = +0.5c$，$\nu = 1$ を (c) で求めた式に代入して理論値 ν' を求めなさい．

$$\nu' = \sqrt{\frac{1-0.5}{1+0.5}} \times 1 = \sqrt{\frac{0.5}{1.5}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0.577 \text{ Hz}$$

6. $\nu' = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\nu$ において，$c \to \infty$ のときの極限を求めなさい．

$$\nu' = (1-\beta)^{\frac{1}{2}}(1+\beta)^{-\frac{1}{2}} \times \nu \fallingdotseq \left(1-\frac{\beta}{2}\right)\left(1-\frac{\beta}{2}\right)\nu \fallingdotseq (1-\beta) \times \nu = \left(1-\frac{V}{c}\right) \times \nu = \frac{c-V}{c} \times \nu$$

7. 原点に静止している光源がある．時刻 $t = 0$ s に $x = 10$ m から速さ $V = -0.5c$ で動く K' 系の観測する光の振動数 ν' を求めなさい．

(a) 時空図から：5 個の波面が通過する時間を求めることにより計算する．

$$\nu' = \frac{5\text{個}}{3.75/\alpha_r} = \frac{5\text{個}}{3.75/1.29} = 1.72\,\mathrm{Hz}$$

(b) ドップラー効果の式から

$$\nu' = \sqrt{\frac{1+0.5}{1-0.5}} \times 1 = \sqrt{\frac{1.5}{0.5}} = \sqrt{3} = 1.73\,\mathrm{Hz}$$

8. 時刻 $t = 0$ s に原点から速さ $V = +0.5c$ で離れていく光源がある．原点に静止している観測者が観測する光の振動数 ν' を求めなさい．

(a) 時空図から：5 個の波面が通過する時間を求めることにより計算する．

$$\nu' = \frac{5\text{個}}{8.69} = 0.575\,\mathrm{Hz}$$

(b) ドップラー効果の式から

$$\nu' = \sqrt{\frac{1-0.5}{1+0.5}} \times 1 = \sqrt{\frac{0.5}{1.5}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0.577\,\mathrm{Hz}$$

9. 時刻 $t = 0$ s に $x = 10$ m から速さ $V = -0.5c$ で動く光源がある．原点に静止している観測者が観測する光の振動数 ν' を求めなさい．

(a) 時空図から：5 個の波面が通過する時間を求めることにより計算する．

$$\nu' = \frac{5\text{個}}{2.90} = 1.724\,\mathrm{Hz}$$

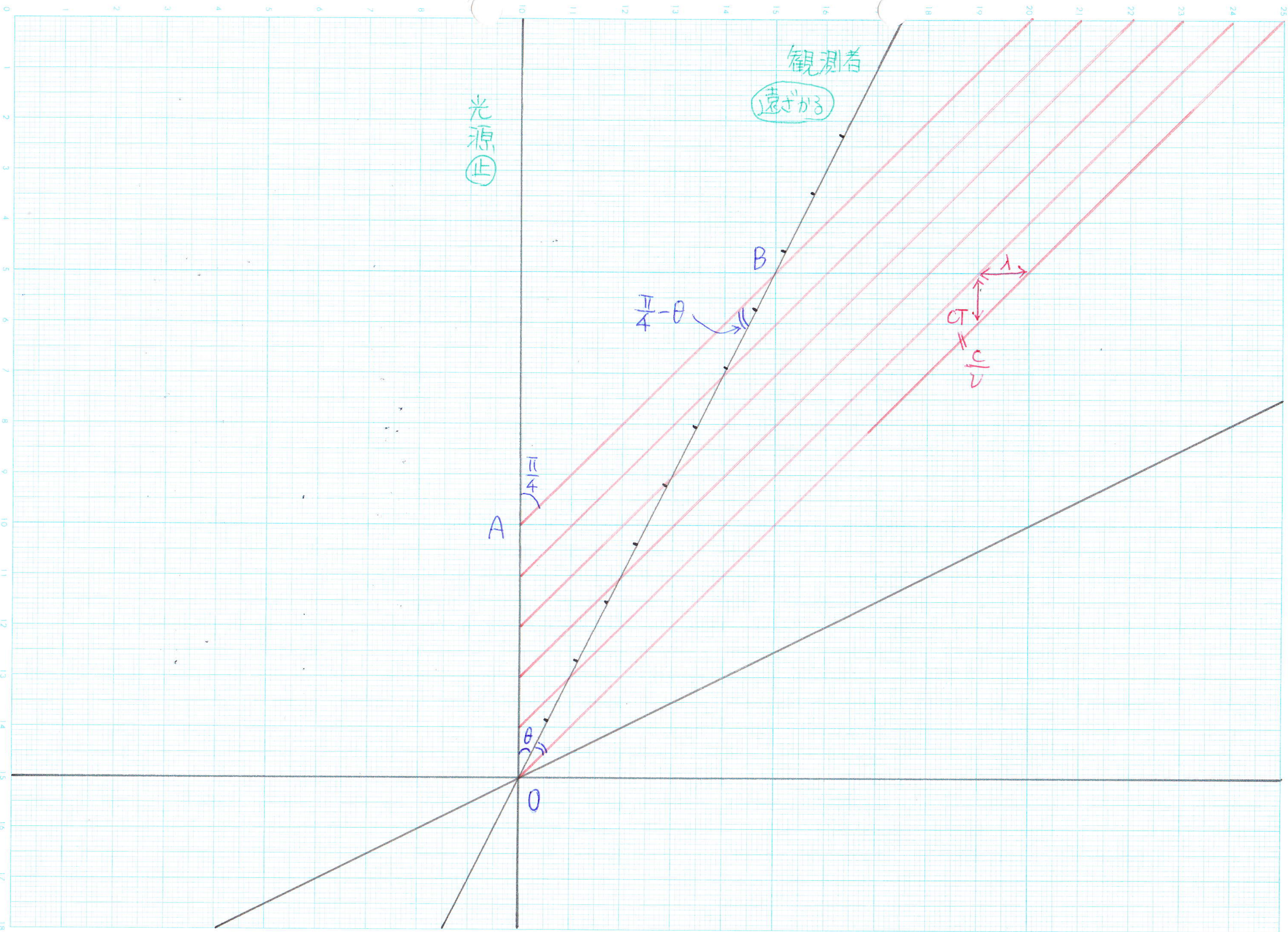
(b) ドップラー効果の式から

$$\nu' = \sqrt{\frac{1+0.5}{1-0.5}} \times 1 = \sqrt{\frac{1.5}{0.5}} = \sqrt{3} = 1.732\,\mathrm{Hz}$$

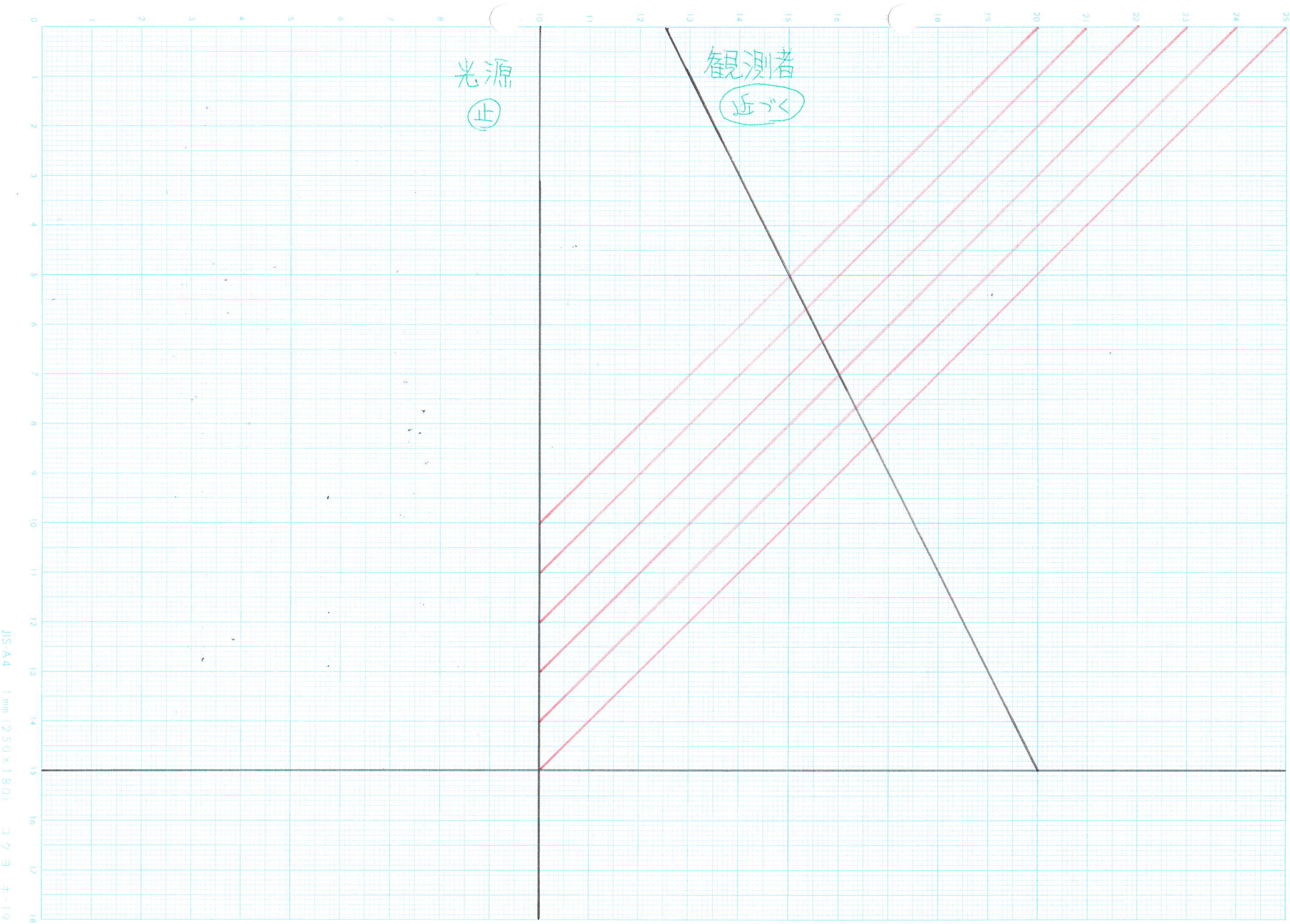
10. かんむり座は地球から 8.6 億光年にある銀河団である．赤方偏移 $z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda'-\lambda}{\lambda} = 0.0721$ とすると，光速の何倍で地球から遠ざかっているか．

$$\frac{\nu'}{\nu} = \frac{1}{1+z} = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$ より $\beta = 0.0695$

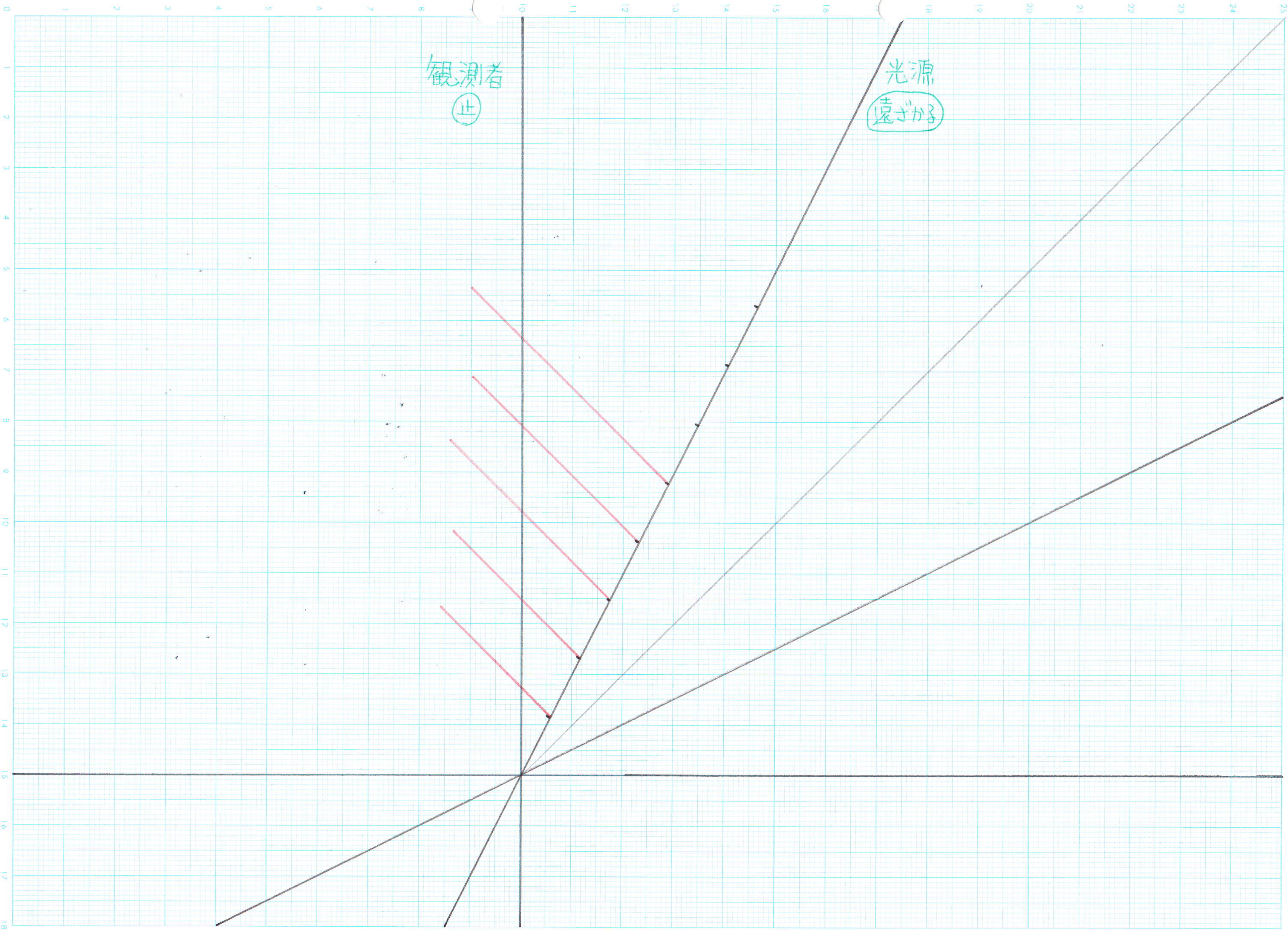
11. 今日の講義でわかったこと・わからなかったこと・感想などを書きなさい．(自由記載)



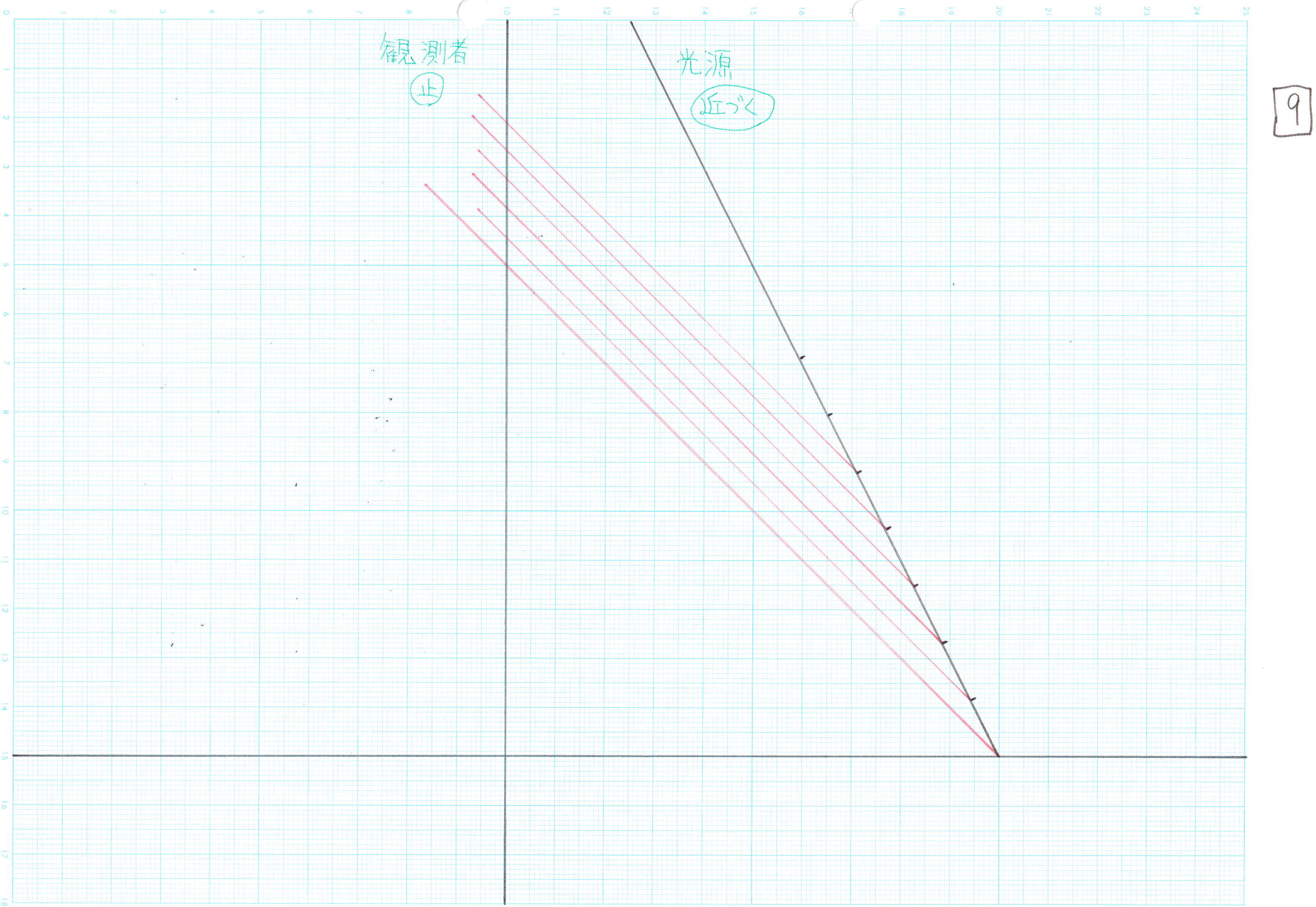
観測者
遠ざかる
光源
止
B
$\frac{\pi}{4}-\theta$
λ
cT
$=\frac{c}{\nu}$
$\frac{\pi}{4}$
A
θ
O



17



観測者
止
光源
遠ざかる
8


観測者
止
光源
近づく
9