§3. 運動方程式を解く

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{mv}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\right) = F}$$

$$F = \frac{d}{dt}\left(\frac{mv}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\right)$$

$$= \frac{m}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\frac{dv}{dt} + mv\left(-\frac{1}{2}\right)\left\{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right\}^{-\frac{3}{2}}(-2)\frac{v}{c}\frac{1}{c}\frac{dv}{dt}$$

$$= \frac{m}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\frac{dv}{dt} + \frac{m\left(\frac{v}{c}\right)^2}{\left\{1-(v/c)^2\right\}^{3/2}}\frac{dv}{dt}$$

$$= \frac{m\left\{1-(v/c)^2\right\} + m(v/c)^2}{\left\{1-(v/c)\right\}^{3/2}} \times \frac{dv}{dt}$$

$$= \frac{m}{\left\{1-(v/c)^2\right\}^{3/2}} \times \frac{dv}{dt}$$

したがって，

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m}\left\{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right\}^{3/2}$$

ここで $F = mg$ のときを考えよう。

$$\frac{dv}{dt} = g\left\{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right\}^{3/2}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = v \\[2ex] \dfrac{dv}{dt} = g\left\{1-\left(\dfrac{v}{c}\right)^2\right\}^{3/2}. \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{\epsilon\to 0} \dfrac{x(t+\epsilon)-x(t)}{\epsilon} = v(t) \\[2ex] \lim\limits_{\epsilon\to 0} \dfrac{v(t+\epsilon)-v(t)}{\epsilon} = g\left\{1-\left(\dfrac{v(t)}{c}\right)^2\right\}^{3/2} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} x(t+\epsilon) = x(t) + \epsilon v(t) \\[2ex] v(t+\epsilon) = v(t) + \epsilon g\left\{1-\left(\dfrac{v(t)}{c}\right)^2\right\}^{3/2} \end{cases}$$

番号　　　　　　　　氏名

特殊相対論 No.12 運動方程式を解く (1) 自由落下運動 (動力学 No.6 参照)

$$\begin{cases} x_r(t+\epsilon) & = x_r(t) + \epsilon v_r\left(t+\dfrac{\epsilon}{2}\right) \\ v_r\left(t+\dfrac{\epsilon}{2}\right) & = v_r\left(t-\dfrac{\epsilon}{2}\right) + \epsilon g\left\{1-\left(v_r\left(t-\dfrac{\epsilon}{2}\right)/c\right)^2\right\}^{3/2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_c(t+\epsilon) & = x_c(t) + \epsilon v_c\left(t+\dfrac{\epsilon}{2}\right) \\ v_c\left(t+\dfrac{\epsilon}{2}\right) & = v_c\left(t-\dfrac{\epsilon}{2}\right) + \epsilon g \end{cases}$$

ここで，$\epsilon = 0.20$ s，$g = 1.0$ m/s^2，$c = 1.0$ m/s とし，小数第 4 位を四捨五入しなさい．

時刻 t〔s〕	位置 $x_r(t)$〔m〕	速さ $v_r(t)$〔m/s〕	位置 $x_c(t)$〔m〕	速さ $v_c(t)$〔m/s〕
0	$x_r(0) = 0.0$	$v_r(0) = 0.0$	$x_c(0) = 0.0$	$v_c(0) = 0.0$
		$v_r(\frac{\epsilon}{2}) = v_r(0) + \frac{\epsilon}{2}g\left\{1-\left(\frac{v_r(0)}{c}\right)^2\right\}^{3/2}$ $= 0.100$		$v_c(\frac{\epsilon}{2}) = v_c(0) + \frac{\epsilon}{2}g$ $= 0.100$
ϵ	0.020		0.020	
		0.287		0.300
2ϵ	0.077		0.080	
		0.447		0.500
3ϵ	0.166		0.180	
		0.573		0.700
4ϵ	0.281		0.320	
		0.669		0.900
5ϵ	0.414		0.500	
		0.740		1.100
6ϵ	0.562		0.720	
		0.793		1.300
7ϵ	0.720		0.980	
		0.832		1.500
8ϵ	0.887		1.280	
		0.862		1.700
9ϵ	1.059		1.620	
		0.885		1.900
10ϵ	1.236		2.000	
		0.903		2.100
11ϵ	1.417		2.420	
		0.917		2.300
12ϵ	1.600		2.880	
		0.928		2.500
13ϵ	1.786		3.380	
		0.938		2.700
14ϵ	1.973		3.920	
		0.945		2.900
15ϵ	2.162		4.500	
		*****		*****

1. $v-t$ グラフ，$x-t$ グラフをグラフ用紙に描きなさい．

2. 質量 m の物体に一定の力 $F = mg$ が働くときの，物体の運動方程式を解こう．

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\right) = F = mg \tag{1}$$

(a) 初期条件 ($t = 0$ のとき $v_0 = 0$) のとき運動方程式を t で積分して

$$v_r = \frac{gt}{\sqrt{1+\left(\frac{gt}{c}\right)^2}} \tag{2}$$

となることを示しなさい．

(b) 上の解について，$t \to \infty$ の極限を求めなさい．

(c) 上の解について，$c \to \infty$ の極限を求めなさい．(Newton 力学の解と一致するか？)

3. $v = \frac{dx}{dt}$ より，初期条件 ($t = 0$ のとき $x_0 = 0$) のもとで (2) 式を t について積分して

$$x_r = \frac{c^2}{g}\sqrt{1+\left(\frac{gt}{c}\right)^2} - \frac{c^2}{g} \tag{3}$$

となることを示しなさい．

(a) 式 (3) より漸近線を求め，問 **1.** で描いた $x-t$ グラフに漸近線を書き入れなさい．

(b) 上の解について，$c \to \infty$ の極限を求めなさい．(Newton 力学の解と一致するか？)
Hint : $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \cdots$ ($|x| < 1$ のとき)

4. 式 (2) より

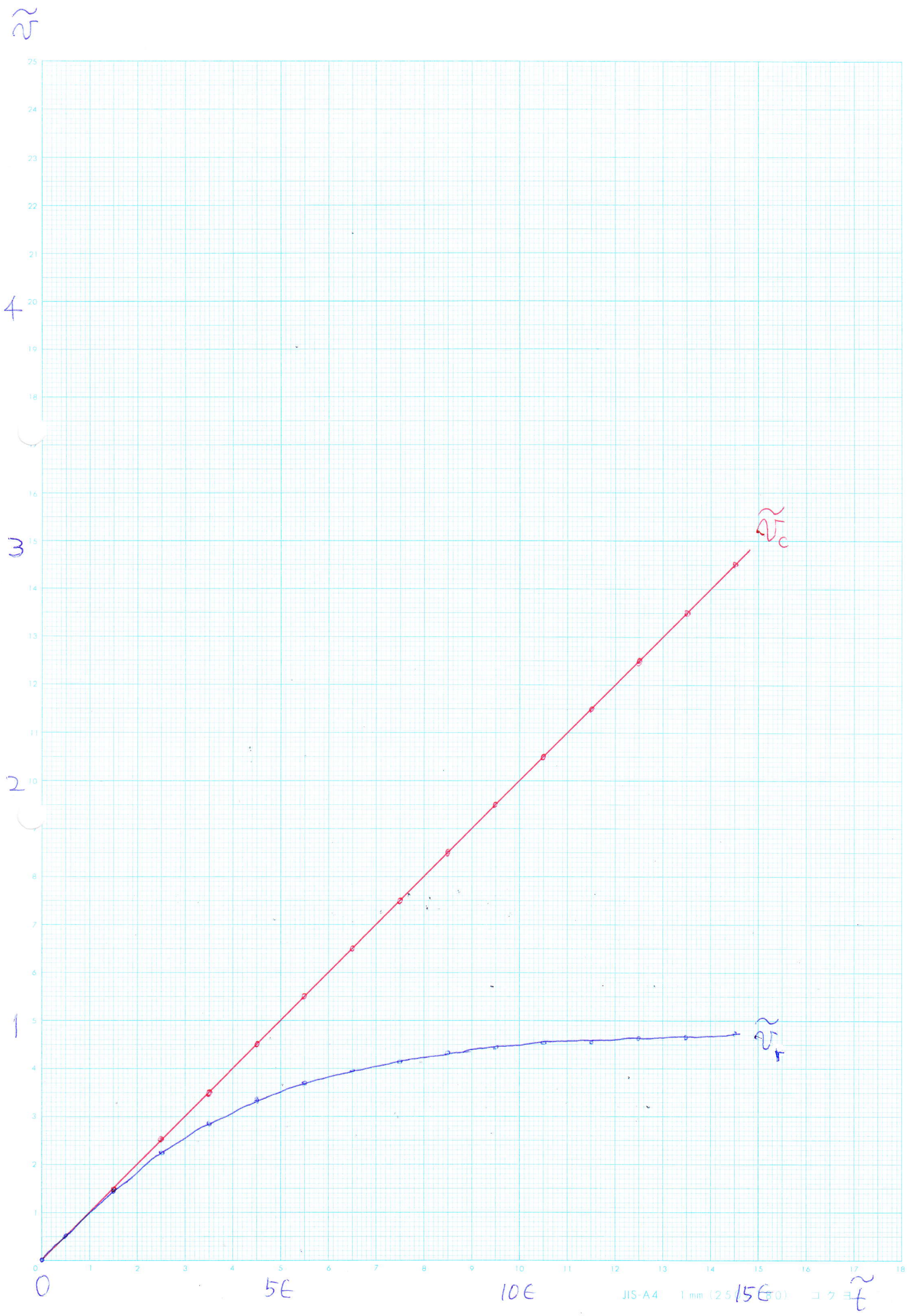
(a) 物体の固有時 $\tau = \int_0^t dt\sqrt{1-(v_r/c)^2}$ を計算し，$w = ct$ を τ で表しなさい．
Hint : $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \sinh^{-1} x$

(b) $w = ct$ と $c\tau$ の大小関係を決めなさい．

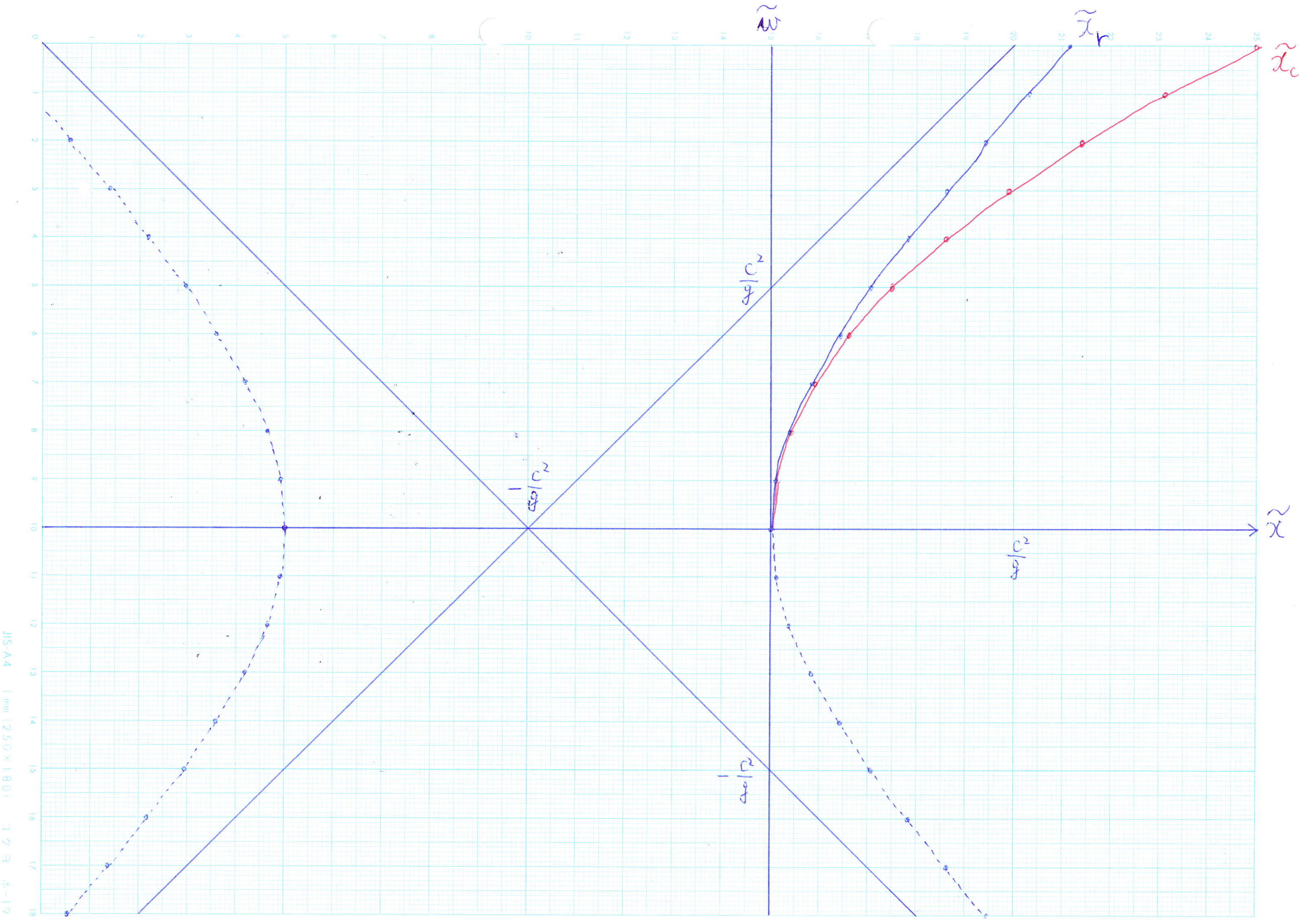
(c) 式 (3) を τ で表しなさい．

(d) $u^0 = \frac{dw}{d\tau}$，$u^1 = \frac{dx}{d\tau}$ を計算し，$(u^0)^2 - (u^1)^2$ を求めなさい．

5. 今日の講義でわかったこと・わからなかったこと・感想などを書きなさい．(自由記載)



$\tilde{v}$
4
3
2
1
0
$\tilde{v}_c$
$\tilde{v}_r$
5ε
10ε
15ε
$\tilde{t}$
JIS-A4



$\tilde{w}$
$\tilde{x}_r$
$\tilde{x}_c$
$\tilde{x}$
c^2/g
$-c^2/g$
c^2/g
$-c^2/g$

$\boxed{2}$ (a)

$$\frac{mv}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = mgt + A \text{(積分定数)}$$

初期条件より $A=0$ なので、

$$\frac{v}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = gt$$

vについて解く

$$\frac{v^2}{1-(v/c)^2} = g^2t^2$$

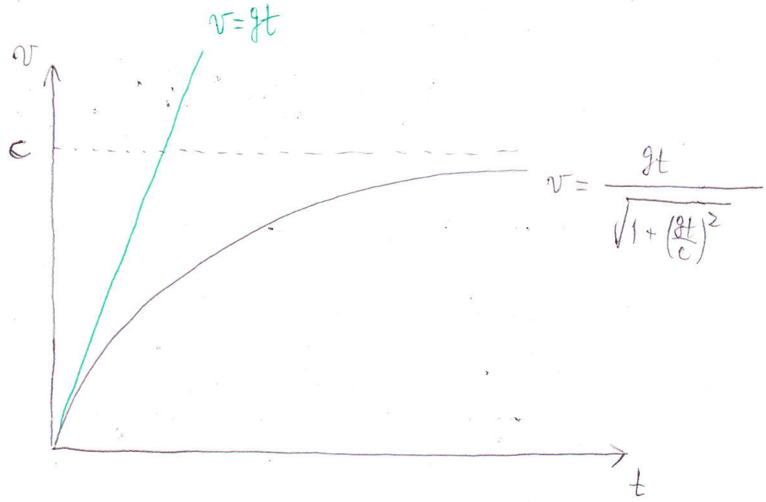
$$v^2 = g^2t^2 - \left(\frac{gt}{c}\right)^2 v^2$$

$$\left\{1+\left(\frac{gt}{c}\right)^2\right\} v^2 = g^2t^2$$

$$\boxed{v = \frac{gt}{\sqrt{1+\left(\frac{gt}{c}\right)^2}}}$$

(b) $$v = \frac{g}{\sqrt{\frac{1}{t^2}+\left(\frac{g}{c}\right)^2}} \longrightarrow \frac{g}{g/c} = c \quad (t\to\infty)$$

(c) $$v = \frac{gt}{\sqrt{1+\left(\frac{gt}{c}\right)^2}} \longrightarrow gt \quad (c\to\infty)$$



3

$$\frac{dx}{dt} = \frac{gt}{\sqrt{1+\left(\frac{gt}{c}\right)^2}}$$ より

$$x = \int dt \frac{gt}{\sqrt{1+\left(\frac{gt}{c}\right)^2}} = \frac{c^2}{g}\sqrt{1+\left(\frac{gt}{c}\right)^2} + B$$ (積分定数)

初期条件から $0 = \frac{c^2}{g} + B$ より $B = -\frac{c^2}{g}$

したがって、

$$\boxed{x = \frac{c^2}{g}\sqrt{1+\left(\frac{gt}{c}\right)^2} - \frac{c^2}{g}}$$

(a) $$\frac{g}{c^2}x + 1 = \sqrt{1+\left(\frac{gt}{c}\right)^2}$$

$$\left(\frac{g}{c^2}x+1\right)^2 = 1 + \left(\frac{gt}{c}\right)^2$$

$$\left(\frac{g}{c^2}x+1\right)^2 - \left(\frac{gt}{c}\right)^2 = 1$$

$$\left(\frac{g}{c^2}x+1+\frac{gt}{c}\right)\left(\frac{g}{c^2}x+1-\frac{gt}{c}\right) = 1$$

$$\frac{g}{c^2}x + 1 + \frac{gw}{c^2} = 0 \qquad \frac{g}{c^2}x+1 - \frac{gw}{c^2} = 0$$

$$w = -x - \frac{c^2}{g} \qquad \therefore w = x + \frac{c^2}{g}$$

(b) $$x = \frac{c^2}{g}\left\{1+\left(\frac{gt}{c}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} - \frac{c^2}{g} \fallingdotseq \frac{c^2}{g}\left\{1+\frac{1}{2}\left(\frac{gt}{c}\right)^2\right\} - \frac{c^2}{g} = \frac{g}{2}t^2$$

4 (a)

$$1-\left(\frac{v}{c}\right)^2 = 1-\frac{g^2t^2/c^2}{1+\left(\frac{gt}{c}\right)^2} = \frac{1}{1+\left(\frac{gt}{c}\right)^2}$$

固有時

$$\tau = \int_0^t dt\sqrt{\frac{1}{1+\left(\frac{gt}{c}\right)^2}} = \frac{c}{g}\,\mathrm{arcsinh}\left(\frac{gt}{c}\right)$$

したがって

$$\sinh\left(\frac{g\tau}{c}\right) = \frac{gt}{c}$$

$$\therefore t = \frac{c}{g}\sinh\left(\frac{g\tau}{c}\right) \quad \text{または} \quad \boxed{w = ct = \frac{c^2}{g}\sinh\left(\frac{g\tau}{c}\right)}$$

(b)

$$\frac{w=ct}{c\tau} = \frac{\frac{c^2}{g}\sinh\left(\frac{g\tau}{c}\right)}{c\tau} = \frac{\sinh\left(\frac{g\tau}{c}\right)}{\frac{g\tau}{c}} > 1 \quad \text{したがって} \quad w > c\tau$$

(c)

$$x = \frac{c^2}{g}\sqrt{1+\left(\frac{gt}{c}\right)^2} - \frac{c^2}{g} = \frac{c^2}{g}\sqrt{1+\sinh^2\left(\frac{g\tau}{c}\right)} - \frac{c^2}{g} = \boxed{\frac{c^2}{g}\cosh\left(\frac{g\tau}{c}\right) - \frac{c^2}{g} = x}$$

(d)

$$\left.\begin{aligned} u^0 &= \frac{dw}{d\tau} = c\cosh\left(\frac{g\tau}{c}\right) \\ u^1 &= \frac{dx}{d\tau} = c\sinh\left(\frac{g\tau}{c}\right) \end{aligned}\right\} \quad (u^0)^2-(u^1)^2 = c^2\left\{\cosh^2\left(\frac{g\tau}{c}\right) - \sinh^2\left(\frac{g\tau}{c}\right)\right\} = c^2$$