3.3 エネルギーと運動量

§0. いままでの復習

運動方程式 $m\frac{dv}{dt}=F \longrightarrow \frac{d}{dt}(mv)=F$

エネルギー積分 $mv\frac{dv}{dt}=vF \longrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}v^2\right)=\underbrace{v\cdot F}_{\text{仕事率}}$

ここで、

$$p=mv$$

$$E=\frac{m}{2}v^2$$

とおいた。

$$p^0=\frac{mc}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

$$p^1=\frac{mv}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

運動方程式

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\right)=F$$

§1. Einstein力学

運動方程式

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\right)=F$$

を採用する。

$$F=\frac{d}{dt}\left(\frac{mv}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\right)$$

$$=\frac{m}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\frac{dv}{dt}+mv\left(-\frac{1}{2}\right)\left\{1-(v/c)^2\right\}^{-\frac{3}{2}}\cdot(-2)\frac{v}{c}\frac{1}{c}\frac{dv}{dt}$$

$$=\frac{m}{\left\{1-(v/c)^2\right\}^{3/2}}\left[\left\{1-(v/c)^2\right\}+\left(\frac{v}{c}\right)^2\right]\frac{dv}{dt}=\frac{m}{\left\{1-(v/c)^2\right\}^{3/2}}\frac{dv}{dt}$$

一方で. p^0の時間微分は.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mc}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\right)=mc\left(-\frac{1}{2}\right)\left\{1-(v/c)^2\right\}^{-\frac{3}{2}}(-2)\frac{v}{c}\frac{1}{c}\frac{dv}{dt}$$

$$=\frac{mv}{c}\frac{1}{\left\{1-(v/c)^2\right\}^{3/2}}\frac{dv}{dt}$$

$$=\frac{v}{c}\times F$$

したがって.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\right)=F$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\right)=v\cdot F$$

ここで. Newton力学と同じようにして. . .

$$p=\frac{mv}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

$$E=\frac{mc^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

§2. 相対論的エネルギーと運動量

① エネルギーと運動量の関係

$$\left(\frac{E}{c}\right)^2 - p^2 = \frac{m^2c^2}{1-(v/c)^2} - \frac{m^2v^2}{1-(v/c)^2} = m^2c^2\,\frac{1-(v/c)^2}{1-(v/c)^2} = m^2c^2$$

したがって

$$E = c\sqrt{p^2+m^2c^2}$$

② 運動量と速さ

$$p^2 = \frac{m^2v^2}{1-(v/c)^2}$$

$$p^2 - p^2\left(\frac{v}{c}\right)^2 = m^2v^2$$

$$p^2 = \left(\frac{p^2}{c^2}+m^2\right)v^2$$

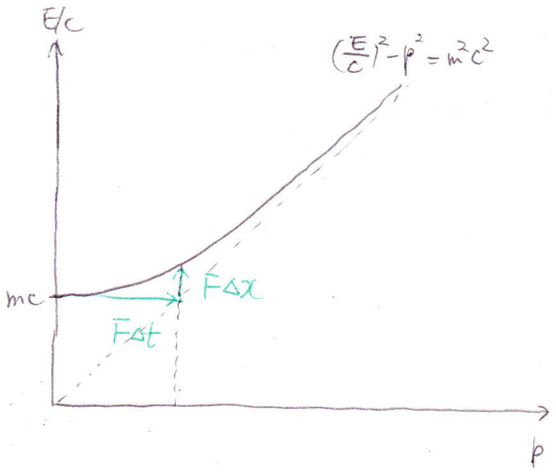
$$v^2 = \frac{p^2c^2}{p^2+m^2c^2} = \frac{p^2c^2}{(E/c)^2} \qquad \therefore v = \frac{pc}{E/c} = \frac{pc^2}{E}$$

③ 連立微分方程式を解こう.

$$\begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = F \\[2mm] \dfrac{dE}{dt} = v\cdot F \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{p(t+\epsilon)-p(t)}{\epsilon} = F \\[2mm] \dfrac{E(t+\epsilon)-E(t)}{\epsilon} = v(t)\cdot F \end{cases}$$



$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} p(t+\epsilon) = p(t) + \epsilon F \\[2mm] E(t+\epsilon) = E(t) + \epsilon F\cdot v(t) = E(t) + \epsilon F\,\dfrac{p(t)c^2}{E(t)} \longrightarrow \dfrac{E(t+\epsilon)}{c} = \dfrac{E(t)}{c} + \epsilon F\,\dfrac{p(t)}{E(t)/c} \end{cases}$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{pc^2}{E}\frac{dp}{dt}$$

$$E\frac{dE}{dt} - c^2p\frac{dp}{dt} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}E^2 - \frac{c^2}{2}p^2\right] = 0 \qquad \therefore \frac{E^2}{2} - \frac{c^2}{2}p^2 = \text{const.}$$

番号　　　　　　氏名

特殊相対論 No.14 運動量とエネルギー (動力学 No.20 参照)

相対論的自由落下運動に対する運動方程式

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\right) = F = mg \tag{1}$$

を初期条件 ($t=0$ のとき $x=v=0$) で積分して

$$x = \frac{c^2}{g}\sqrt{1+\left(\frac{gt}{c}\right)^2} - \frac{c^2}{g}, \qquad v = \frac{gt}{\sqrt{1+(\frac{gt}{c})^2}} \tag{2}$$

となった．これから運動量とエネルギー

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \qquad E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \tag{3}$$

を求めよう．

ニュートン力学では ⋯ 自由落下運動に対する運動方程式

$$m\frac{dv}{dt} = F = mg \tag{4}$$

を初期条件 ($t=0$ のとき $x=v=0$) で積分して

$$x = \frac{g}{2}t^2, \qquad v = gt \tag{5}$$

となった．これから運動量と力学的エネルギー

$$p = mv, \qquad E = \frac{m}{2}v^2 \tag{6}$$

を求めよう．

1. 表1と表2の空欄をうめなさい．$\epsilon = 0.20$，$m = g = c = 1$，$F = mg = 1$とし，小数第4位を四捨五入しなさい．

2. 表1と表2から，縦軸にエネルギーE/c，横軸に運動量pをとった$E/c-p$グラフを描きなさい．

3. 式(3)よりエネルギーを運動量で書きなおすと

$$E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} \tag{7}$$

となる．$v \ll c$のとき，(3)と(7)を展開しなさい．
Hint：$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \cdots$ ($|x| < 1$のとき)

4. 粒子が静止している($v = 0$)ときのエネルギーEは，

$$E = mc^2 \tag{8}$$

と表される．これを**静止エネルギー**という．

(a) 物質1 gの静止エネルギーは何Jか．

(b) 0°Cの水1 kgを沸騰させるのに420 kJのエネルギーが必要とされる．上の静止エネルギーは，水何kgを沸騰させることができるか．

(c) 電子の質量は$m_e = 9.11 \times 10^{-31}$ kgである．電子の静止エネルギーは何MeVか．

5. 次の連立微分方程式

$$\begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = F \\ \dfrac{dE}{dt} = vF = \dfrac{pc^2}{E}F \end{cases} \tag{9}$$

をFを消去することによって解きなさい．初期条件は$t = 0$のとき$v = 0$より，$p = 0$，$E = mc^2$である．

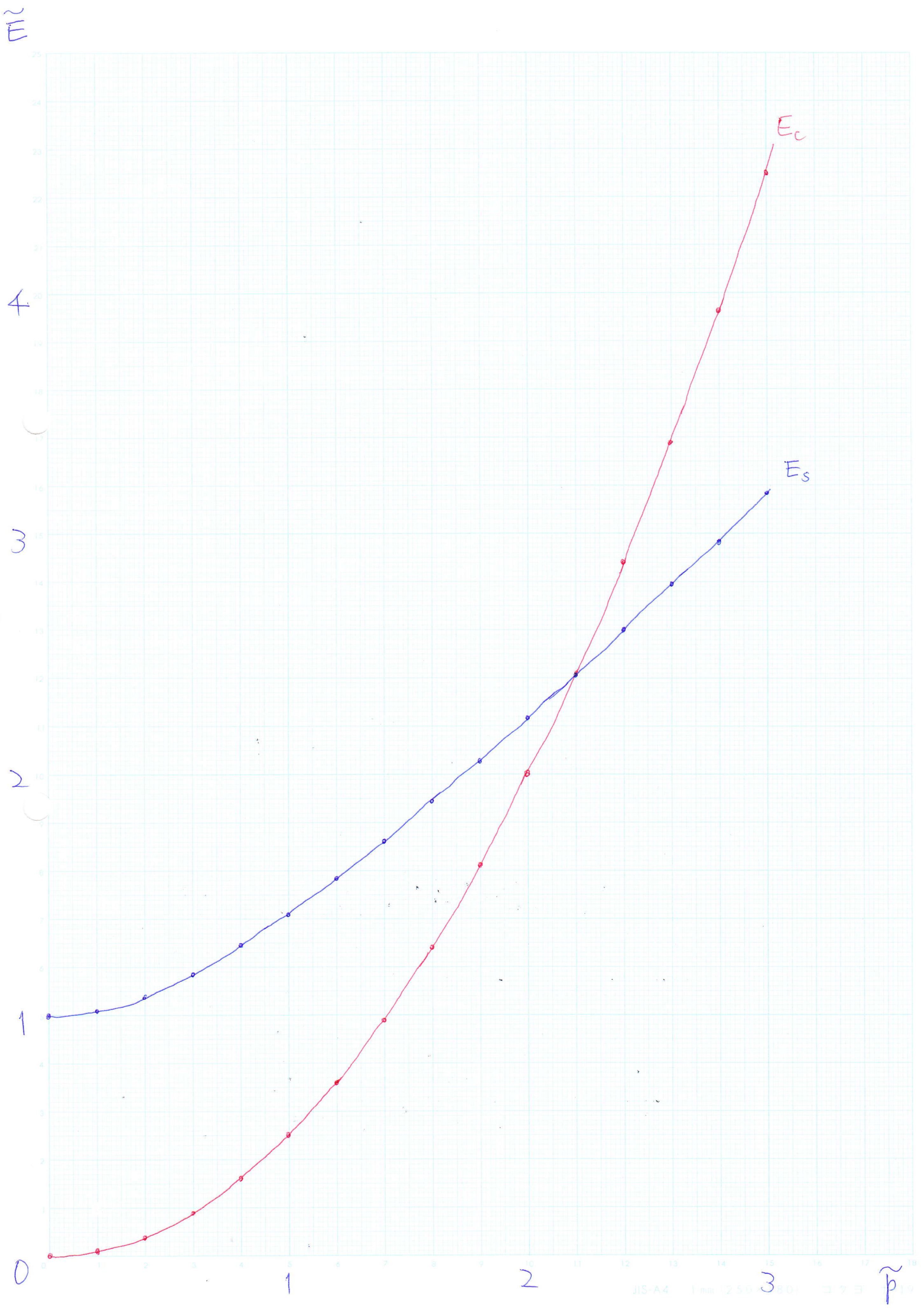
6. 今日の講義でわかったこと・わからなかったこと・感想などを書きなさい．(自由記載)

表 1: 特殊相対論的運動量とエネルギー

t	x_s	v_s	$p_s = \frac{mv_s}{\sqrt{1-(v_s/c)^2}}$	Δp_s	$F\Delta t$	$E_s = \frac{mc^2}{\sqrt{1-(v_s/c)^2}}$	ΔE	$F\Delta x_s$
0	0	0	0	*****	*****	1	*****	*****
ϵ	0.020	0.196	0.200	0.2	0.2	1.020	0.020	0.020
2ϵ	0.077	0.371	0.400	0.2	0.2	1.077	0.057	0.057
3ϵ	0.166	0.514	0.600	0.2	0.2	1.166	0.089	0.089
4ϵ	0.281	0.625	0.800	0.2	0.2	1.281	0.115	0.115
5ϵ	0.414	0.707	1.000	0.2	0.2	1.414	0.133	0.133
6ϵ	0.562	0.768	1.200	0.2	0.2	1.562	0.148	0.148
7ϵ	0.720	0.814	1.400	0.2	0.2	1.720	0.158	0.158
8ϵ	0.887	0.848	1.600	0.2	0.2	1.887	0.167	0.167
9ϵ	1.059	0.874	1.800	0.2	0.2	2.059	0.172	0.172
10ϵ	1.236	0.894	2.000	0.2	0.2	2.236	0.177	0.177
11ϵ	1.417	0.910	2.200	0.2	0.2	2.417	0.181	0.181
12ϵ	1.600	0.923	2.400	0.2	0.2	2.600	0.183	0.183
13ϵ	1.786	0.933	2.600	0.2	0.2	2.786	0.186	0.186
14ϵ	1.973	0.942	2.800	0.2	0.2	2.973	0.187	0.187
15ϵ	2.162	0.949	3.000	0.2	0.2	3.162	0.189	0.189
				*****	*****		*****	*****

表 2: ニュートン力学的運動量とエネルギー

t	x_c	v_c	$p_c = mv_c$	Δp_c	$F\Delta t$	$E_c = \frac{m}{2}v_c^2$	ΔE_c	$F\Delta x_c$
0	0	0	0	*****	*****	0	*****	*****
				0,2	0,2		0,02	0,02
ϵ	0.020	0.200	0.200			0.020		
				0,2	0,2		0,04	0,04
2ϵ	0.080	0.400	0.400			0.080		
				0,2	0,2		0,10	0,10
3ϵ	0.180	0.600	0.600			0.180		
				0,2	0,2		0,14	0,14
4ϵ	0.320	0.800	0.800			0.320		
				0,2	0,2		0,18	0,18
5ϵ	0.500	1.000	1.000			0.500		
				0,2	0,2		0,22	0,22
6ϵ	0.720	1.200	1.200			0.720		
				0,2	0,2		0,26	0,26
7ϵ	0.980	1.400	1.400			0.980		
				0,2	0,2		0,30	0,30
8ϵ	1.280	1.600	1.600			1.280		
				0,2	0,2		0,34	0,34
9ϵ	1.620	1.800	1.800			1.620		
				0,2	0,2		0,38	0,38
10ϵ	2.000	2.000	2.000			2.000		
				0,2	0,2		0,42	0,42
11ϵ	2.420	2.200	2.200			2.420		
				0,2	0,2		0,46	0,46
12ϵ	2.880	2.400	2.400			2.880		
				0,2	0,2		0,50	0,50
13ϵ	3.380	2.600	2.600			3.380		
				0,2	0,2		0,54	0,54
14ϵ	3.920	2.800	2.800			3.920		
				0,2	0,2		0,58	0,58
15ϵ	4.500	3.000	3.000			4.500		
				*****	*****		*****	*****



$\tilde{E}$
4
3
2
1
0
1
2
3
$\tilde{p}$
E_c
E_s

3

(3) $E = \dfrac{mc^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = mc^2\left\{1-\left(\dfrac{v}{c}\right)^2\right\}^{-\frac{1}{2}} \fallingdotseq mc^2\left\{1+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{v}{c}\right)^2\right\} = mc^2 + \dfrac{m}{2}v^2$

(7) $E = \sqrt{p^2c^2+m^2c^4} = mc^2\left\{1+\left(\dfrac{pc}{mc^2}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} \fallingdotseq mc^2\left\{1+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{pc}{mc^2}\right)^2\right\} = mc^2 + \dfrac{1}{2}\dfrac{p^2c^2}{mc^2}$

$= mc^2 + \dfrac{p^2}{2m}$

4 (a) $E = 1\times10^{-3}\,\mathrm{kg}\times(3\times10^8)^2 = 9\times10^{13}\,\mathrm{J}$

(b) $1\,\mathrm{kg}$ —— $420\times10^3\,\mathrm{J}$

$x\,\mathrm{kg}$ —— $9\times10^{13}\,\mathrm{J}$

$x = \dfrac{9\times10^{13}}{420\times10^3} = 2.1\times10^8\ \mathrm{kg}$

(c) $E = 9.11\times10^{-31}\times(3\times10^8)^2 = 81.99\times10^{-15}\,\mathrm{J} = \dfrac{81.99\times10^{-15}}{1.60\times10^{-19}} = 5.12\times10^5\,\mathrm{eV} = 0.512\ \mathrm{MeV}$

5 $\dfrac{dE}{dt} = \dfrac{pc^2}{E}\dfrac{dp}{dt}$

$E\dfrac{dE}{dt} - pc^2\dfrac{dp}{dt} = 0$

$\dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{1}{2}E^2 - \dfrac{c^2}{2}p^2\right] = 0$

$E^2 - p^2c^2 = C$ (積分定数)

初期条件より $C = m^2c^4$

したがって

$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$

$\therefore E = \sqrt{p^2c^2+m^2c^4}$